

Introduction à la relativité restreinte

Mehdi Benjelloun, Sarra Blaiech, Maud Girard, Jarod Golse,
Yassir Kasry, Benjamin Lefebvre, Raphaël Orts, Averil Prost,
Maxime Soenen, Benjamin Suty, Théophile Thierry, Li Zhicun

7 juin 2019

Table des matières

I	L’astrophysique et l’optique avant Lorentz	1
1	La mesure de la vitesse de la lumière	2
1.1	Les mesures astronomiques	2
1.1.1	Les premières pensées	2
1.1.2	La découverte de la vitesse de la lumière grâce à l’observation de Io	3
1.2	Les expériences en laboratoire	3
1.2.1	L’idée de François Arago	3
1.2.2	La roue dentée d’Hippolyte Fizeau	4
2	L’Éther de Fresnel et les transformations de Galilée face à l’expérience de Michelson et Morley	6
2.1	Les Transformations de Galilée	6
2.1.1	La transformation propre de Galilée	6
2.2	La théorie de l’Éther	7
2.2.1	La théorie de Fresnel	8
2.2.2	L’expérience de Fizeau	8
2.3	L’expérience de Michelson et Morley	9
2.3.1	Intérêt de l’expérience	9
2.3.2	Principe de l’expérience	11
2.3.3	Dispositifs et résultats expérimentaux	13
2.3.4	Conséquences de l’expérience de Michelson et Morley	14
II	Introduction à la physique relativiste	16
3	Preuve de la non-invariance des équations de Maxwell par transformée de Galilée	17
3.1	Rappels	17
3.2	Preuve de la non-invariance des équations de Maxwell	19
3.2.1	Non-invariance du champ électromagnétique par transformation de Galilée	20
3.2.2	Non-invariance des équations de Maxwell	20
4	Les fondamentaux de la relativité restreinte	22
4.1	Les transformations de Lorentz	22
4.1.1	Lorentz : une conséquence de l’invariance de c	22
4.1.2	Autrement dit : le raisonnement d’Einstein	25
4.2	Loi de composition des vitesses	26
4.3	Le diagramme de Minkowski	27
4.4	Diagonalisation des transformations de Lorentz et intervalle d’espace-temps	28
4.4.1	L’invariance de l’intervalle d’espace-temps	29
4.4.2	Interprétations de l’intervalle d’espace-temps	30

4.5	Une autre approche : la trigonométrie hyperbolique	32
4.5.1	Introduction à la trigonométrie hyperbolique	32
4.5.2	γ et β en fonction des relations hyperboliques	33
4.5.3	Addition des rapidités et définition de l'addition des vitesses	34
4.6	Tenseurs : pour aller vers la quantité de mouvement	35
4.7	Conclusion	36

Résumé

Ce rapport constitue une introduction à la relativité restreinte. Dans celui-ci, nous abordons l'évolution de la physique de Galilée à Lorentz. À l'origine une cosmologie basée sur des croyances, la cinématique s'est muée en une théorie mathématisée. Nous donnerons plusieurs approches et interprétations justifiées des équations employées : bonne lecture.

Première partie

L'astrophysique et l'optique avant
Lorentz

Chapitre 1

La mesure de la vitesse de la lumière

1.1 Les mesures astronomiques

1.1.1 Les premières pensées

Comme dans tous les domaines, les premières réflexions sur la nature de la lumière remontent à l'antiquité. En effet, de nombreux philosophes et mathématiciens grecs tels que Platon, Aristote, Euclide ou encore Eratosthène ont tenté de se pencher sur ce problème. Leurs tentatives étaient néanmoins limitées par leur façon de penser, propre à leurs époques. Certains pensaient que la matière était faite de quatre éléments, d'autres que la Terre est au centre de l'univers... Ils ont vainement essayé de comprendre d'où provenait la lumière, mais n'ont alors jamais parlé de vitesse de transmission.

Cette première intuition vient de Ibn al Haytham, plus connu sous le nom de Alhazen, dans la Perse du XI^e siècle. Il est notamment connu pour être l'un des premiers à avoir écrit un traité d'optique. Dans ses écrits, il sépare la propagation de la lumière et la vision des objets, et a l'intuition que la lumière possède une vitesse finie. Mais cela ne restera qu'une intuition, les technologies de l'époque ne permettant pas d'expérimenter cette vitesse.

C'est Galilée au XVII^e siècle qui, le premier, chercha à mesurer cette vitesse (nous le présenterons brièvement dans le Chapitre 2). Il imagina l'expérience suivante : deux personnes postées à bonne distance l'une de l'autre se font des signaux lumineux, en masquant et démasquant des lanternes, l'un démasquant sa lanterne aussitôt qu'il aperçoit le signal de l'autre lanterne. Il imagina même, si besoin était, d'opérer à grande distance, en utilisant des lunettes installées avec les lanternes dans de petits observatoires. Il semble que Galilée ait bien réalisé cette expérience, en plaçant des personnes à quelques centaines de mètres les unes des autres, puis en augmentant la distance, sans dépasser un *mile*.



FIGURE 1.1 – La première expérience sur la vitesse de la lumière de Galilée

Mais les durées mesurées étaient indépendantes de la distance, et ne correspondaient qu'au temps de

réaction des faiseurs de signaux. Galilée ne mesura donc rien du tout. Il n'en déduisit pas pour autant que la propagation était instantanée mais que si la vitesse de la lumière avait une valeur finie, cette valeur serait très grande et nous paraîtrait quasi instantanée à notre échelle.

Galilée n'en resta néanmoins pas là et la découverte des quatre plus gros satellites de Jupiter en 1610 lui permit d'aller plus loin.

1.1.2 La découverte de la vitesse de la lumière grâce à l'observation de Io

Au cours de l'histoire, plusieurs astronomes ont tenté de prévoir l'apparition et la disparition d'astres comme Io, tels que Galilée et Cassini. Io apparaissait très souvent jusqu'à 10 minutes en retard ou en avance, et ces-derniers trouvait pas d'explications.

Quelques années plus tard, Ole Romer trouva d'abord qu'au bout d'une révolution de Io, le premier satellite, on n'observait pas de retard sensible, bien que la distance de la Terre à Jupiter aie varié de plus de 210 diamètres terrestre. Mais pour une variation de distance nettement plus grande, il trouva que 40 révolutions observées lors d'une quadrature étaient plus courtes que 40 autres observées lors de la quadrature suivante. Il en déduisit que quand Jupiter est en conjonction, sa lumière doit, pour nous parvenir, mettre 22 minutes de plus pour parcourir une distance supplémentaire par rapport à l'opposition, égale au diamètre de l'orbite terrestre. En septembre 1676, il prédit ainsi pour une éclipse de Io, un retard de 10 minutes par rapport à la prédiction de Cassini, retard qui fut effectivement observé le 9 Novembre.

Ole Roemer découvrit ainsi la "propagation" de la lumière. C'est en 1690 qu'apparaît la première estimation numérique sous la plume de Huygens. En reprenant le chiffre de 22 minutes, de Roemer, pour traverser l'orbite terrestre dont il estime le diamètre à 24 000 diamètres terrestre, il trouve, en simplifiant un peu, que la lumière parcourt 16 diamètres terrestres en une seconde, ce qui donne alors une valeur entre 200 000 et 230 000 km par seconde.

Le premier ordre de grandeur de la vitesse de la lumière est trouvé, mais sera par la suite amélioré grâce à des expériences non pas avec des astres mais en laboratoire.

1.2 Les expériences en laboratoire

1.2.1 L'idée de François Arago

Arrivé au XIX^e siècle, les scientifiques se mettent à faire des expériences en laboratoire pour calculer la vitesse de la lumière sans faire intervenir des facteurs comme la distance Terre-Soleil par exemple. C'est en décembre 1838 qu'un physicien et homme politique, François Arago, expose à l'Académie le projet d'une expérience qui visait à trancher entre les deux théories de la lumière. D'un côté, la théorie corpusculaire de l'émission était soutenue par Newton, et d'un autre la théorie des ondulatoires, portée par Huygens et Fresnel.

Arago comptait utiliser un dispositif à miroir tournant conçu par Wheatstone, où deux rayons parallèles traverseraient un milieu différent. Il explique : « Selon la théorie de l'émission, la lumière se déplace dans l'eau notablement plus vite que dans l'air. Selon la théorie des ondes, c'est le contraire : la lumière se déplace plus vite dans l'air que dans l'eau. » Il s'est donc proposé de faire en sorte qu'avant d'arriver au miroir, un des deux rayons aie à traverser un tube rempli d'eau. Si la théorie de l'émission est vraie, le rayon passant par le tube rempli d'eau sera accéléré dans sa marche ; il se réfléchirait avant l'autre rayon, formant avec lui un certain angle, et le sens de la déviation serait tel, que le rayon étant passé entièrement dans l'air paraîtrait plus avancé que l'autre, autrement dit qu'il semblerait avoir été entraîné plus vite par le miroir tournant.

En revanche, si c'est le système des ondes qui est juste, le tube d'eau retardera la marche du rayon qui arrivera au miroir réfléchissant après l'autre rayon ; il s'y réfléchira, non plus le premier, comme tout à l'heure, mais le second. Malheureusement, cette expérience d'Arago ne fut jamais réalisée. Le dispositif de Wheatstone nécessitait une trop grande longueur entre le miroir tournant et l'observateur, et utilisait des éclats lumineux dont on ne savait où il fallait les détecter. Mais pourtant, ce projet n'a pas été inutile car il a grandement inspiré l'expérience de Foucault dont on parlera plus tard.

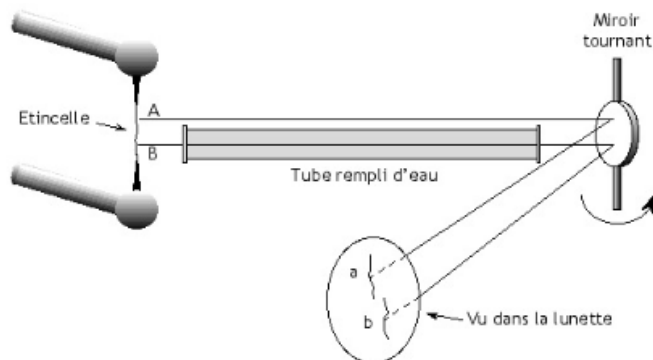


FIGURE 1.2 – Schéma du dispositif d'Arago

1.2.2 La roue dentée d'Hippolyte Fizeau

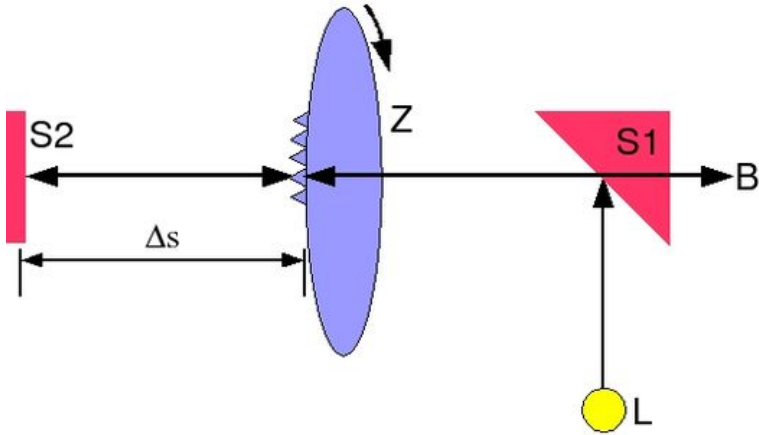


FIGURE 1.3 – Schéma du dispositif expérimental de la roue dentée

Entre temps, le grand physicien et astronome Hippolyte Fizeau utilise une roue dentée, en 1849, pour approximer la vitesse de la lumière. L'expérience est particulièrement bien pensée : il utilise une roue dentée dont l'axe est parallèle à un faisceau lumineux. Lorsque le faisceau n'est pas arrêté par une «dent» de la roue, il est renvoyé par un miroir placé à grande distance, comme l'avait suggéré Fermat pour Galilée. Quand le rayon revient sur la roue, soit il passe entre deux dents, soit il est arrêté par une dent, selon la vitesse de la roue. La roue dentée Z est mise en rotation, la source lumineuse L est réfléchi par un premier miroir semi-transparent $S1$, franchit une échancrure de la roue, parcourt la distance d (Δs sur le schéma), se réfléchit sur un miroir lointain $S2$, parcourt à nouveau la distance d , et arrive à nouveau sur la roue dentée. Mais celle-ci, entre-temps, a légèrement tourné : la lumière réfléchi peut tomber sur une dent et donc être bloquée, ou passer par une échancrure suivante. En mesurant le temps t qu'il a fallu à la roue pour devenir bloquante, à partir de sa vitesse de rotation (mesurée par l'appareil), et de la distance parcourue (également connue : $2d$), on calcule la vitesse de la lumière par la formule suivante : $c = \frac{2d}{t}$.

Fizeau a effectué son expérience entre Montmartre et le mont Valérien à Suresnes, qui sont distants d'exactly 8633m. Dans un premier temps, il s'aperçoit qu'en tournant très lentement la roue, l'éclat de lumière apparaît puis disparaît en alternance, puis plus la roue tourne vite, plus l'alternance entre les périodes

lumineuses et sombres s'accélère. En revanche, lorsque la roue effectue 12,6 tours par seconde exactement, on n'observe plus aucun faisceau! En effet, le temps que la lumière met pour parcourir la distance Suresnes-Montmartre-Suresnes (soit un peu plus de 17km) correspond à la durée exacte de passage dans le faisceau lumineux d'une échancrure de la roue à la dent qui la suit. Ainsi, la lumière qui traverse la roue à l'aller par une échancrure, est bloquée à son retour par la dent suivante. Le faisceau est donc occulté et ne parvient plus à l'observateur. Pour calculer la vitesse de la lumière, il faut donc effectuer $c = \frac{2d}{t}$: On connaît $2d$, qui est 2 fois 8633m, et t est calculé grâce à la vitesse de rotation de la roue, connue. Sachant que la roue comportait 720 dents et autant de creux, quand la lumière passe par un creux pour revenir sur une dent, on a effectué $\frac{1}{1440}$ de tour. Or, la fréquence de rotation f étant de $12,6 \text{ tour.s}^{-1}$, on en déduit que $t = \frac{1}{1440}f = \frac{1}{1440} \times 12,6$. On peut alors calculer

$$c = \frac{2d}{t} = 2 \times 8633 \times 1440 \times 12,6 = 313000000 \text{ m.s}^{-1}$$

En opérant de nuit, la moyenne de 28 observations lui donne une valeur d'environ 315000 km.s^{-1} . La précision de la mesure varie en fonction de la précision de la vitesse de rotation de la roue dentée. C'est la première fois qu'on réalise une mesure "de laboratoire" donnant directement la valeur cherchée sans dépendre d'une autre grandeur, comme la distance terre-soleil.

Certains astronomes émettent des hypothèses quant au déplacement de la lumière : si un rayon de lumière est une onde, dans quel milieu se propage-t-il? Si c'est une particule, comment avance-t-il dans l'espace? Ces questions ont fait naître parmi les astronomes l'idée d'un éther, matière invisible à l'oeil nu et qui permet le mouvement des planètes et de la lumière.

Chapitre 2

L'Éther de Fresnel et les transformations de Galilée face à l'expérience de Michelson et Morley

Dans cette partie nous allons nous intéresser dans un premier temps à deux théories scientifiques très importantes d'avant le XX^e siècle : les transformations de Galilée et la théorie de L'Éther de Fresnel. Ces théories étaient censées expliquer le mouvement des corps et de la lumière.

Dans un second temps nous exposerons l'expérience de Michelson et Morley et nous expliquerons pourquoi les résultats de celle-ci viennent invalider les deux théories précédentes.

2.1 Les Transformations de Galilée

2.1.1 La transformation propre de Galilée

Soient deux référentiels $R(x, y, z, t)$ et $R'(x', y', z', t')$, respectivement le référentiel propre et le référentiel impropre, suivant un mouvement de translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre à la vitesse V .

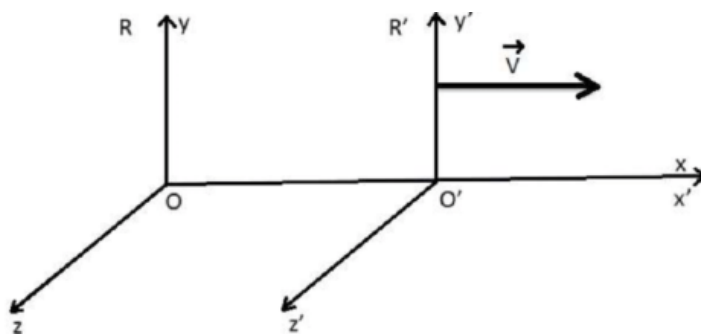


FIGURE 2.1 – Deux référentiels en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre

Le cas le plus simple de transformation de Galilée consiste à considérer la situation où les repères d'espace associés respectivement à R et R' sont choisis de telle sorte que O et O' coïncident à l'origine à $t = t' = 0$, et que les trois axes soient colinéaires. Dans ce cas les formules de transformation entre les coordonnées sont

données par :

$$\begin{cases} r' = r - Vt \\ t' = t \end{cases}$$

avec $r' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

De plus, selon la deuxième loi de Newton, on a $F = ma$.

Or,

$$a' = \frac{d^2 r'}{dt'^2} = \frac{d^2 (r - Vt)}{dt^2} = \frac{dr^2}{dt^2} - \underbrace{V \frac{dt}{dt^2}}_{=0} = a$$

D'où $\sum F = \sum F'$. Les forces sont donc *invariantes* par transformée de Galilée.

Enfin, la transformation de Galilée possède plusieurs propriétés qu'il est bon de souligner :

1. Puisque le temps est absolu, elle conserve les intervalles de temps entre les événements. En particulier si deux événements sont simultanés dans R , alors ils le seront aussi dans R' . La transformation de Galilée préserve la simultanéité.
2. De la même manière, la transformation préserve les mesures de longueur : si, à un instant donné, on mesure la longueur d'un objet dans R , on trouvera une valeur identique à celle mesurée dans R' . Ces deux propriétés sont bien pratiques : elles signifient que deux observateurs dans deux référentiels galiléens seront toujours d'accord sur les mesures de longueur ou de temps.
3. Et enfin troisième conséquence, les vitesses se composent en s'additionnant. Galilée est le premier à l'avoir formulé mathématiquement.

2.2 La théorie de l'Éther

Apparition

Les premières traces de la notion d'éther remontent au VI^e siècle avant J.C., dans les écrits d'Empédocle et de Platon. Ce dernier, en reprenant la théorie des éléments fondamentaux d'Empédocle (eau, air, terre, feu), avait voulu y voir une correspondance « parfaite » avec les 5 polyèdres réguliers – et avait donc du introduire l'éther comme le dodécaèdre pour compléter la série. Dans les siècles suivants, l'éther sera alternativement substance de l'âme, substance des planètes, ou air atmosphérique – plus pur, plus subtil que l'air respirable.

Premières croyances liées à une cosmologie

Ce n'est qu'au XVII^e siècle que l'éther prend vraiment une place dans la physique. René Descartes abhorre le vide, et le remplit donc d'éther dans sa théorie : il caractérise ce milieu comme un ensemble de « minuscules globules translucides », d'une rigidité infinie, qui rempliraient l'univers. La lumière serait ainsi une onde de pression (qu'il appelle « tendance au mouvement ») de ces globules, et serait instantanée ; et le mouvement des planètes serait expliqué par d'immenses tourbillons de ces globules qui entraîneraient les astres dans leur mouvement.

Un demi-siècle plus tard, Newton rejette ces théories en posant la gravitation universelle comme une force attractive située en toute matière, et voit en la lumière des corpuscules. Si la propagation des idées de Newton se traduit par un recul de la théorie de l'éther, le physicien ne le bannit pas ; au contraire, il le pense être le média de la gravitation. L'idée d'une force agissant au travers du vide l'incommode, et il finit par considérer l'éther omniprésent, omnipotent, comme l'influence de Dieu sur le monde.

2.2.1 La théorie de Fresnel

En 1818, une tout autre vision est développée par le jeune Augustin-Louis Fresnel. Fervent défenseur de la théorie ondulatoire de la lumière - malgré l'influence dominante des corpuscules de Newton - Fresnel donne l'éther comme le milieu de transmission de cette onde. Il pense que les milieux transparents le sont car la densité d'éther y est plus forte que dans le vide : très exactement, soit ρ_1 la densité d'éther dans un objet transparent et ρ_0 la densité d'éther dans le vide, on a $\rho_1 = \rho_0 n^2$. Ce calcul semble être un coup de génie, qualifié plus tard de « bidouillage » par J. Rosmorduc dans son ouvrage « *Les révolutions de l'optique et l'oeuvre de Fresnel* » (2004), et sans fondements autres que l'intuition du jeune scientifique. Fresnel pose donc une théorie en deux points majeurs :

1. L'éther est stationnaire dans le vide.
2. L'éther est entraîné partiellement par les milieux transparents en mouvement, avec une vitesse ω inférieure à v la vitesse dudit milieu transparent.

Fresnel pensait que seul l'excès d'éther par rapport au vide était entraîné à la vitesse v d'un objet transparent. En considérant le produit de la densité par la vitesse non plus réparti entre une fraction d'éther totalement entraîné et une autre totalement immobile, mais comme un mouvement de l'ensemble de l'éther à une vitesse ω homogène sur tout ρ_1 , on peut écrire la loi de conservation suivante :

$$\rho_1 \times \omega = (\rho_1 - \rho_0) \times v + \rho_0 \times 0$$

avec la vitesse de l'éther dans le vide nulle. En divisant par ρ_1 et en remplaçant par son expression en fonction de ρ_0 , on obtient

$$\omega = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \times v$$

avec le coefficient de proportionnalité appelé coefficient de Fresnel. Cette théorie n'a pas vraiment de succès parmi le monde scientifique, et les décennies suivantes la passeront sous silence.

2.2.2 L'expérience de Fizeau

En 1851, une expérience d'Hippolyte Fizeau va rappeler d'entre les morts la théorie d'entraînement partiel de l'éther de Fresnel.

En utilisant un dispositif expérimental où il fait circuler deux rayons lumineux cohérents le long d'un même chemin optique, mais dans des sens opposés, Fizeau veut vérifier la loi d'addition des vitesses. De l'eau circule aussi le long de ce chemin ; ainsi, l'un des rayons doit « remonter » le courant tandis que l'autre n'a qu'à le « descendre ». L'observation de la figure d'interférence de ces deux rayons permet de détecter un délai entre l'arrivée du premier et du second, et de conclure sur l'influence de l'eau en mouvement sur la vitesse de la lumière.

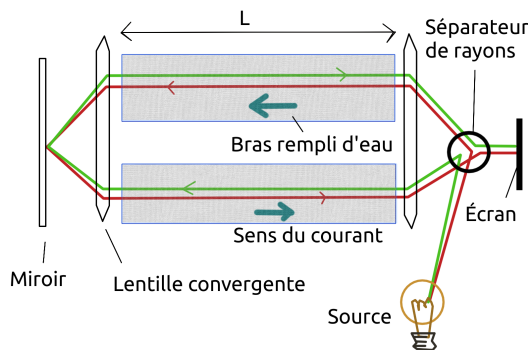


FIGURE 2.2 – Schéma de l'expérience de Fizeau

Calculons le délai (ou retard) entre les deux rayons, autrement dit, le Δt . Chaque rayon parcourt $2L$ à sa propre vitesse :

$$\begin{cases} v_{sens\ opposé} &= \frac{c}{n} - \omega \\ v_{sens\ aligné} &= \frac{c}{n} + \omega \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_{le\ plus\ long} - t_{le\ plus\ court} = 2L \times \left(\frac{1}{v_{opposé}} - \frac{1}{v_{aligné}} \right) \\ &= 2L \times \left(\frac{1}{\frac{c}{n} - \alpha v} - \frac{1}{\frac{c}{n} + \alpha v} \right) = 2L \times \left(\frac{2\alpha v}{\left(\frac{c}{n}\right)^2 - (\alpha v)^2} \right) \\ &= 4L\alpha v \left(\frac{n}{c}\right)^2 \underbrace{\left(\frac{1}{1 - \alpha \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right)}_{\text{peut s'approximer par 1}} = 4L\alpha v \left(\frac{n}{c}\right)^2 \end{aligned}$$

Et on peut bien écrire le résultat comme fonction de $\frac{v}{c}$ au premier ordre :

$$\Delta t = \frac{4Ln^2}{c} \times \alpha \times \frac{v}{c}$$

Avec :

L	la longueur d'un bras
c	la célérité de la lumière dans le vide
n	l'indice de réfraction du milieu en mouvement (ici, l'eau)
v	la vitesse du milieu en mouvement
Δt	le délai entre les deux rayons
α	le coefficient de Fresnel

Ce résultat découle directement de la vieille théorie d'Augustin-Louis Fresnel. Fizeau conclût donc, fort surpris, que la théorie de Fresnel est empiriquement vérifiée; il appelle en conséquence le monde scientifique à examiner les autres points de la théorie, pour en déterminer ou non la validité – de laquelle il doute.

C'est dans cette optique (haha) que Michelson et Morley, après avoir refait l'expérience de Fizeau, vont tenter de vérifier le premier point de la théorie de Fresnel.

2.3 L'expérience de Michelson et Morley

Albert Abraham Michelson (1852-1931) était un physicien américain. Il reçut le Prix Nobel de physique en 1907 pour l'expérience qui porte désormais son nom. Edward Morley (1838-1923) était un physicien, chimiste et professeur d'université américain.

« L'expérience de Michelson et Morley » n'est pas une mais bien deux expériences, l'une en 1881 et l'autre 1887. Michelson réalise seul la première et s'accompagne de Morley pour la seconde.

2.3.1 Intérêt de l'expérience

« Peu nous importe que l'éther existe réellement, c'est l'affaire des métaphysiciens; l'essentiel pour nous c'est que tout se passe comme s'il existait et que cette hypothèse est commode pour l'explication des phénomènes. Après tout, avons-nous d'autre raison de croire à l'existence des objets matériels? Ce n'est là aussi qu'une hypothèse commode; seulement elle ne cessera jamais de l'être, tandis qu'un jour viendra sans doute où l'éther sera rejeté comme inutile. »

- Henri Poincaré, *La Science et l'hypothèse* (Chapitre 12)

Le but affiché par Michelson était de mettre en évidence la présence du vent d'éther luminifère en tant qu'explication du phénomène d'aberration de la lumière, à partir de la loi classique d'addition des vitesses (Transformées de Galilée).

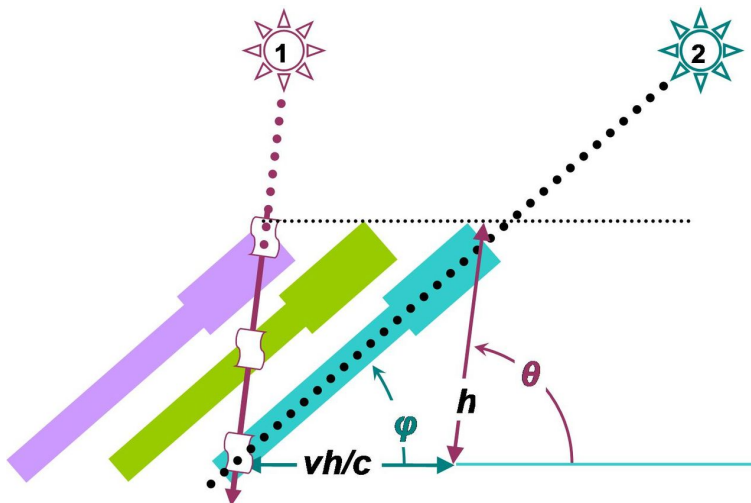


FIGURE 2.3 – Schéma du phénomène d'aberration de la Lumière

L'aberration de la lumière est un phénomène optique qui fait se déplacer les images des étoiles dans le ciel tout au long de l'année, de manière similaire à un effet de parallaxe mais ne pouvant être expliqué par ce dernier car sensiblement plus important, de l'ordre de 20 fois supérieur (20 secondes d'arc contre 1 seconde d'arc pour la parallaxe).

On considère deux référentiels R et R' en translation l'un par rapport à l'autre avec une vitesse relative v . Si la lumière émise par une étoile immobile dans R' arrive dans R avec un angle θ par rapport à Ox , la vitesse de la lumière s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} -c \times \cos(\theta) \\ -c \times \sin(\theta) \end{pmatrix}_{R'} \equiv \begin{pmatrix} -c \times \cos(\theta) - v \\ -c \times \sin(\theta) \end{pmatrix}_R$$

Formant donc un angle φ dans R tel que :

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) + \frac{v}{c}}$$

Ainsi, si l'étoile est au zénith, cela donne $\theta = \frac{\pi}{2}$ soit $\tan(\varphi) = \frac{v}{c}$.

Au cours de l'année, la trajectoire de la Terre changeant de sens, la vitesse relative varie de v à $-v$, la mesure de la position de l'étoile dans un intervalle de 6 mois donne ainsi la valeur du double de l'angle φ .

Cependant, ces calculs de physique classique ne peuvent expliquer pourquoi un télescope rempli d'eau (dans lequel la lumière se déplace moins vite) ne détecte pas une aberration plus prononcée, motivant Michelson à réaliser son expérience.

En effet, en remplaçant, c par $\frac{3}{4}c$, la vitesse de la lumière effective dans l'eau, l'on s'attendrait à obtenir un angle φ' plus important que φ puisque $\tan(\varphi') = \frac{4}{3} \times \frac{v}{c} > \frac{v}{c} = \tan(\varphi) \Leftrightarrow \varphi' > \varphi$. Or l'angle mesuré ne varie pas de manière perceptible. De fait l'angle φ varie si peu que celui-ci porte en astronomie le nom de constante d'aberration, et sa valeur dans les catalogues astronomique est de $\varphi = 20,49552''$.

Les physiciens de l'époque estimaient que la vitesse de la Terre par rapport au Soleil était d'environ $30 \pm 0.5 \text{ km.s}^{-1}$, dans une direction et un sens variant en fonction de la date et l'heure. Ils estimaient également que la lumière se déplace en moyenne à environ 3.10^8 m.s^{-1} .

Il était généralement admis et approuvé à l'époque que la lumière, comme le son dans l'air avait besoin d'un milieu pour se propager, milieu encore appelé l'éther, qualifié de luminifère et omniprésent dans l'Univers.

En revanche personne n'avait jusque-là réussi à déterminer la vitesse relative de la Terre par rapport à l'éther.

2.3.2 Principe de l'expérience

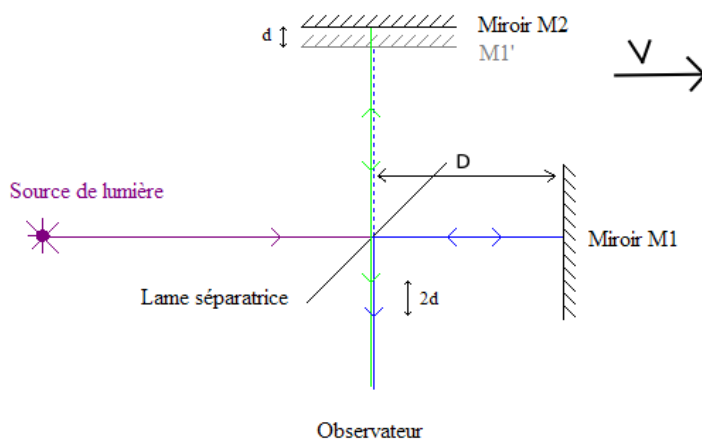


FIGURE 2.4 – Illustration l'expérience de Michelson-Morley

Principe de l'expérience : Un faisceau lumineux (les lasers n'existaient pas dans les années 1880) est envoyé dans la direction du mouvement de la Terre par rapport au Soleil (plan de l'écliptique) dans un miroir semi-réfléchissant (lame séparatrice) qui le sépare en deux vers 2 miroirs totaux M1 et M2.

Cet appareil s'appelle maintenant un interféromètre de Michelson.

Durée de l'aller-retour de la lame séparatrice à M1 :

$$t_1 = \frac{D}{c+v} + \frac{D}{c-v} = \frac{D \times (c-v)}{c^2 - v^2} + \frac{D \times (c+v)}{c^2 - v^2}$$

$$= \frac{2Dc}{c^2 - v^2}$$

Ce qui donne en effectuant un développement limité à l'ordre 2 pour $\frac{v^2}{c^2}$ proche de 0 :

$$t_1 = \frac{2D}{c \times \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$\simeq \frac{2D}{c} \times \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Durée de l'aller-retour de la lame séparatrice à M2 :

Où, par définition :

$$L = t_2 \cdot c$$

Ce qui donne :

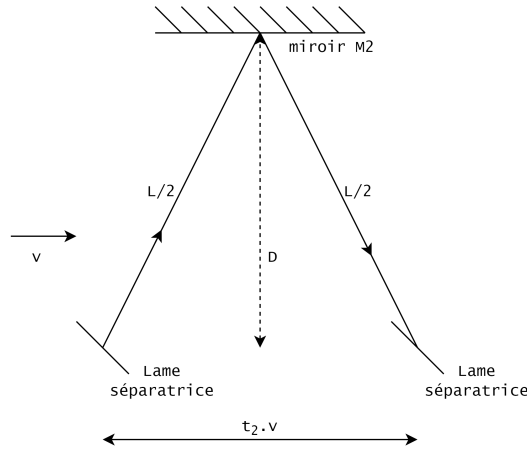


FIGURE 2.5 – Visualisation du parcours de la lumière lors de l’aller retour de la lame séparatrice au miroir M2

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{2}\right)^2 &= D^2 + \left(\frac{t_2 v}{2}\right)^2 \\ \frac{t_2^2 c^2}{4} &= D^2 + \frac{t_2^2 v^2}{4} \\ t_2^2 \times (c^2 - v^2) &= 4D^2 \\ t_2 &= \frac{2D}{\sqrt{c^2 - v^2}} \end{aligned}$$

Ce qui donne, une fois appliquée la même approximation que pour t_1 :

$$t_2 \simeq \frac{2D}{c} \times \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$$

La différence des durées donne donc :

$$\Delta t = t_1 - t_2 = D \times \frac{v^2}{c^3}$$

Avec $D \simeq 10m$, $v \simeq 10^4 m.s^{-1}$, $c \simeq 10^8 m.s^{-1}$ on obtient $\Delta t \simeq 10^{-15} s$.

La différence des durées est trop petite pour être mesurée, en revanche ce retard entre les deux faisceaux devrait générer une figure d’interférence car la différence de marche est non négligeable.

Différence de marche :

$$\Delta \delta = c \cdot \Delta t$$

Ordre d’interférence :

$$\Delta p = \frac{\Delta \delta}{\lambda} = \frac{c \cdot \Delta t}{\lambda}$$

Soit, pour $\lambda = 500nm$, $\Delta p = 0.2 franges$.

Ce qui serait très visible en théorie.

Pour vérifier que la figure d’interférence n’est pas générée par des défauts éventuels de l’appareil, il suffit de tourner celui-ci de 90° et de répéter l’expérience pour observer si la figure d’interférence se modifie. Si elle est invariante, c’est que l’appareil est la cause des interférences. C’est ce que firent Michelson et Morley pour chacune de leurs observations.

L'expérience doit être répétée à plusieurs moments du jour, car le mouvement rotationnel de la Terre ne peut pas être négligé.

Enfin, il faut réitérer l'expérience à plusieurs moments de l'année, au cas où, par hasard, l'éther et la Terre ne se déplaceraient à la même vitesse en certaines régions de l'univers. En effet la nature elliptique du mouvement de la Terre autour du soleil garantit que s'il existe bel et bien un vent d'éther, celui-ci devrait pouvoir être mis en évidence à un moment ou l'autre de l'année, car le vent d'éther et la vitesse de la Terre ne peuvent concorder tout le long de la trajectoire de notre planète.

Michelson fit l'expérience trois jours de suite, à l'aube et le soir tous les trois mois pendant plus d'un an.

2.3.3 Dispositifs et résultats expérimentaux

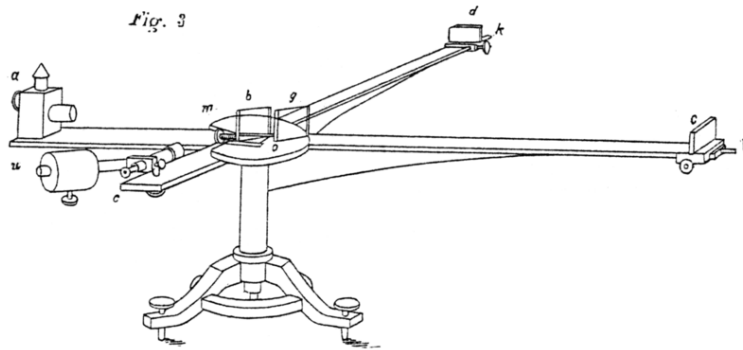


FIGURE 2.6 – Dispositif de 1881

Le premier interféromètre de Michelson, celui de 1881 était trop petit pour détecter quoi que ce soit. Michelson crût pouvoir conclure de l'absence de résultats que la théorie de Fresnel pour un éther partiellement statique au niveau de la surface de la Terre était fautive et que le modèle de George Stokes pour un éther totalement statique à la surface de la Terre s'imposait. Cependant, d'autres physiciens comme Alfred Potier ou encore Hendricks Lorentz remarquèrent que les calculs de Michelson présentaient une erreur et que l'ordre d'interférence étaient en réalité plus petit que celui prédit par Michelson, trop pour pouvoir être mesuré par un appareil d'une telle facture.

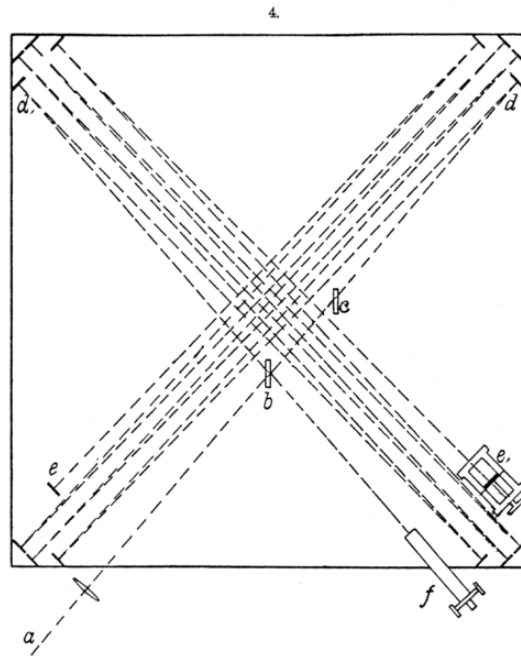


FIGURE 2.7 – Dispositif de 1887

Le second interféromètre est bien plus précis que le premier, celui-ci est monté sur une dalle de pierre de sable dans un bain de mercure permettant de facilement de la faire tourner. Les faisceaux de lumière blanche sont envoyés d'avant en arrière plusieurs fois grâce à des miroirs pour obtenir une distance effective $D = 11\text{m}$. Des lampes de lumière jaune partiellement monochromatique au sodium sont utilisées pour régler l'appareil. Michelson et Morley prévoient d'observer un ordre d'interférence de $\Delta p = 0.4$ franges et calculent que leur appareil est suffisamment précis pour détecter de telles interférences.

Cependant, en dépit de toute leurs prévisions, les deux physiciens n'observent aucune figure d'interférences notable.

Or, la Terre se déplaçant sur une trajectoire elliptique autour du soleil, il est impossible que la vitesse du vent d'éther soit la même que celle de la Terre à tout moment de sa course. De plus, l'expérience étant répétée le matin et le soir, la vitesse v varie de $10^3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ environ dans les 12h qui séparent les deux expériences.

Michelson et Morley, dans *On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether*, de 1887, concluent donc par la phrase suivante : « S'il y a un mouvement relatif entre la Terre et l'éther lumineux, il doit être petit. ». Encore une fois, Michelson avance que l'absence de résultats suffit à réfuter la théorie de Fresnel sur l'éther et son explication de l'aberration de la lumière par le vent d'éther. Cette fois, personne ne vient remettre en cause cette conclusion.

L'expérience a été répétée de nombreuses fois depuis avec des instruments d'une complexité et d'une précision croissantes sans jamais contredire la justesse de l'observation effectuée par Michelson et Morley en 1887.

2.3.4 Conséquences de l'expérience de Michelson et Morley

Plusieurs tentatives d'explication échouèrent par la suite.

En premier, Stokes imagina un éther statique au niveau de la surface de la Terre, expliquant ainsi l'absence d'interférences lors de l'expérience. Cependant Lorentz arrive à prouver que cette théorie ne permet pas d'expliquer le phénomène de l'aberration de la lumière.

Par la suite, en 1892, Lorentz et George Fitzgerald proposent simultanément une nouvelle hypothèse, inspirée par les récentes découvertes d'Oliver Heaviside en électromagnétique qui a montré que les champs magnétiques se contractent dans la direction du mouvement. Dans cette hypothèse les longueurs se contractent pour tout objet en mouvement relatif à l'observateur. Il introduit en outre son fameux facteur de Lorentz :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Tel que la longueur d'un objet mesurée par un observateur vaut :

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = l_0 \times \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Avec :

l	la longueur mesurée par l'observateur
l_0	la longueur propre de l'objet mesuré
γ	le facteur de Lorentz
v	la vitesse de l'observateur par rapport à l'objet
c	la célérité de la Lumière dans le vide

Pour tout objet de longueur propre l_0 se déplaçant à la vitesse v par rapport à l'observateur.

Cette théorie explique les observations de Michelson et Morley, D devient $D' = \frac{D}{\gamma}$ dans la direction de M1, ce qui donne :

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{2D'c}{c^2 - v^2} = \frac{2Dc \times \gamma}{c^2 - v^2} = \frac{2Dc \times \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c^2 \times (1 - \frac{v^2}{c^2})} \\ &= \frac{2D}{c \times \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2D}{\sqrt{c^2 - v^2}} \\ &= t_2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_1 - t_2 = 0 \\ \Delta p &= \frac{c \cdot \Delta t}{\lambda} = 0 \end{aligned}$$

Lorentz se voit décerner le prix Nobel de physique pour cette théorie.

En revanche cette théorie dépend encore d'un référentiel de l'éther immobile, en tant que référentiel absolu. Notre vitesse par rapport à ce référentiel étant inconnue et impossible à mesurer, cette théorie fait intervenir des grandeurs non observables, ce qui est difficilement accepté, même par Lorentz lui-même qui qualifie sa théorie d'«étrange».

Finalement il faudra attendre 1905 pour qu'Albert Einstein ne propose sa théorie de la relativité restreinte de laquelle l'éther est absent et où la vitesse de la lumière est la même pour tous les référentiels, permettant une explication des résultats de l'expérience de Michelson-Morley ainsi qu'une explication de l'aberration de la lumière et plus généralement du comportement de la lumière.

Conclusion de l'expérience

Les différentes cosmologies proposées avant 1905 reposent sur des observations, des intuitions et des expériences. Malgré des problèmes d'interprétation et des conflits de théorie, une base mathématique émerge doucement pour décrire le comportement de la lumière. Les technologies ayant suffisamment évolué pour permettre d'établir l'invariance de c , la physique va devoir se tourner vers une plus grande mathématisation de l'univers, et dans la prochaine partie, se détachera complètement de l'expérience sensorielle humaine.

Deuxième partie

Introduction à la physique relativiste

Chapitre 3

Preuve de la non-invariance des équations de Maxwell par transformée de Galilée

Dès la fin du XIX^{ème} siècle, il devint clair que le principe de relativité classique ne semblait pas s'étendre aux phénomènes électromagnétiques et optiques, puisque les équations de Maxwell (1831-1879), établies en 1865, qui régissent ces phénomènes ne sont pas invariantes par transformations de Galilée, ou du moins ne seraient invariantes par transformations des variables d'espace et de temps, que si l'on admettait pour le champ électromagnétique et pour les densités de charge et de courant des lois de transformation extrêmement compliquées.

En d'autres termes, il était évident, et le premier à l'apercevoir très distinctement fut sans doute Poincaré, qu'il existait une incompatibilité entre les équations de Maxwell et les transformations de Galilée. Poincaré insiste sur la contradiction existant entre la mécanique classique et l'électromagnétisme et sur l'intérêt qu'il pourrait y avoir à créer une nouvelle mécanique qui serait en harmonie avec l'électromagnétisme, de telle sorte que le principe de relativité soit applicable à tous les phénomènes physiques et non plus seulement aux phénomènes mécaniques.

Dans cette partie nous allons montrer l'incompatibilité entre les équations de Maxwell et les transformations de Galilée en démontrant la non-invariance de ses équations par l'application à celles-ci des transformations de Galilée.

3.1 Rappels

La transformation de Galilée

Soient deux référentiels :

1. $R(x, y, z, t)$

2. $R'(x', y', z', t')$ suivant un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à R . R' se déplace

à une vitesse constante $V = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ par rapport à R .

La transformée de Galilée se traduit par

$$\begin{cases} r' = r - Vt \\ t' = t \end{cases}$$

avec $r' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

De plus, selon la deuxième loi de Newton, on a $F = ma$. On a prouvé plus tôt que les forces sont invariantes par transformée de Galilée.

Quelques opérateurs mathématiques

On rappelle ici quelques opérateurs mathématiques indispensables pour manipuler et comprendre les équations de Maxwell.

1. L'opérateur Nabla $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$
2. L'opérateur divergence $div(A) = \nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
3. L'opérateur rotationnel $rot(A) = \nabla \wedge A = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$
4. $rot(rot(A)) = \nabla(div(A)) - \nabla^2(A)$

Les équations de Maxwell

Voici les quatre équations de l'électromagnétisme communément dites « de Maxwell » :

Maxwell-Thompson	Maxwell-Faraday	Maxwell-Gauß	Maxwell-Ampère
$div(B) = 0$	$rot(E) = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$div(E) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$rot(B) = \mu_0(j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t})$

Avec

- B le vecteur champ magnétique
- E le vecteur champ électrique
- ρ la densité de charge
- ϵ_0 la permittivité du vide
- μ_0 la perméabilité du vide
- t la date

La contribution de Maxwell aux équations ci-dessus, qu'il a unifiée, est d'ordre théorique et n'aura aucune confirmation expérimentale avant la fin de la vie de ce dernier.

Il est notamment le père du deuxième terme de l'équation de Maxwell-Ampère, et ce pour des raisons purement mathématiques : celui-ci remarque que sous la forme $rot(B) = \mu_0 j$ cette équation n'est pas compatible avec celle de la conservation de la charge : $div(j) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. En effet, en appliquant l'opérateur divergence des deux côtés, on obtient :

$$\begin{aligned} div(rot(B)) &= div(\mu_0 j) = \mu_0 div(j) \\ 0 &= \mu_0 div(j) \\ \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui n'est pas toujours vrai. Ainsi, l'absurdité mathématique indique une lacune dans l'équation de départ. Maxwell procéda donc de la manière suivante pour trouver le terme manquant, que l'on appellera ici X en postulant que l'équation est de la forme $rot(B) = \mu_0(j + X)$. En appliquant à nouveau la divergence,

on obtient $\mu_0 \operatorname{div}(j) = -\operatorname{div}(X) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$. En prenant en compte l'équation de Maxwell-Gauß qui stipule que $\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div}(E)$, on en conclut que $\operatorname{div}(X) = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \operatorname{div}(E)) = \varepsilon_0 \operatorname{div}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)$. Par identification, ce qui le classe bien dans les physiciens, Maxwell donne la forme finale de l'équation : $\operatorname{rot}(B) = \mu_0(j + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t})$. L'on remarquera que les opérateurs divergence et gradient ont été introduits après ces contributions de Maxwell à la physique, par certains de ses successeurs.

Une autre observation de James Clark Maxwell est que $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$, ce qui montre que les constantes de l'électromagnétisme sont liées à la vitesse de la lumière de manière directe. Le physicien y verra une unité des phénomènes optiques et électromagnétiques. L'interprétation de son terme dans l'équation de Maxwell-Ampère en est d'autant plus intéressante : en optique, le terme en j disparaît, laissant une relation d'auto-propagation entre un champ électrique et un champ magnétique. Cette auto-induction explique que la lumière ne s'estompe pas sur la distance ; sa propre variation la régénère, contrairement aux ondes sonores.

3.2 Preuve de la non-invariance des équations de Maxwell

Conservation des opérateurs par transformation de Galilée

L'on montre dans cette partie que les opérateurs rotationnel et divergence sont invariants dans les référentiels R et R'

Soit A une fonction de quatre variables (x, y, z, t) . Nous pouvons donc appliquer la règle de la chaîne à cette fonction pour chacune de ses dérivées partielles :

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x'} \times \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y'} \times \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial z'} \times \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t'} \times \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x'}$$

Le raisonnement est le même pour les deux autres variables spatiales. On s'intéresse maintenant à la variable temporelle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\partial A}{\partial x'} \times \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial y'} \times \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z'} \times \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t'} \times \frac{\partial t'}{\partial t} \\ &= -V_x \times \frac{\partial A}{\partial x} - V_y \times \frac{\partial A}{\partial y} - V_z \times \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial t'} \\ &= -V \bullet (\nabla A) + \frac{\partial A}{\partial t'} \end{aligned}$$

On peut en déduire que les opérateurs divergence et rotationnel, faisant intervenir les dérivées partielles, sont invariants par changement de référentiels.

Une propriété de l'opérateur divergence

Soit V un vecteur constant et B un champ de vecteur, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(V \wedge B) &= \operatorname{div} \begin{pmatrix} V_y B_z - V_z B_y \\ V_z B_x - V_x B_z \\ V_x B_y - V_y B_x \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} (V_y B_z - V_z B_y) + \frac{\partial}{\partial y} (V_z B_x - V_x B_z) + \frac{\partial}{\partial z} (V_x B_y - V_y B_x) \\
&= \left(V_x \frac{\partial}{\partial z} B_y - \frac{\partial}{\partial y} B_z \right) + V_y \left(\frac{\partial}{\partial x} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_x \right) + V_z \left(\frac{\partial}{\partial y} B_x - \frac{\partial}{\partial x} B_y \right) \\
&= V \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= -V \cdot \operatorname{rot}(B)
\end{aligned}$$

Cette propriété sera utile lors de la démonstration de la non-invariance de l'équation de Maxwell-Ampère.

3.2.1 Non-invariance du champ électromagnétique par transformation de Galilée

Étant donné une particule de charge q se déplaçant à une vitesse v dans le référentiel R soumis à un champ électromagnétique noté (E, B) .

Cette particule est alors soumise à une force de Lorentz de la forme :

$$F_L = q(E + v \wedge B)$$

Notons le champ exprimé dans le référentiel R' noté (E', B') . La particule se déplace donc à une vitesse $v' = v - V$ où V est la vitesse de R' par rapport à R . On obtient :

$$F'_L = q(E' + v' \wedge B') = q(E' + (v - V) \wedge B')$$

Sachant que les forces sont conservées par transformations de Galilée :

$$\begin{aligned}
F'_L &= F_L \\
E' + (v - V) \wedge B' &= E + v \wedge B \\
E - (E' - V \wedge B) + v \wedge (B - B') &= 0
\end{aligned}$$

Ce qui est vrai pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, donc qui implique que

$$\begin{cases} B = B' \\ E = E' - V \wedge B \end{cases}$$

Ce résultat peut paraître surprenant au vu du fait que la composante dépendante de la vitesse de la force de Lorentz est la composante magnétique, on se serait attendu à ce que ce soit le champ magnétique qui varie par transformation de Galilée, or ce n'est pas le cas.

3.2.2 Non-invariance des équations de Maxwell

L'équation de Maxwell-Gauß

L'on s'intéresse à l'équation $\operatorname{div}(E) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Notons dans un premier temps que tout comme la charge, la densité de charge ρ est une grandeur qui reste inchangée par transformation de Galilée. Ainsi $\rho' = \rho$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(E) &= \operatorname{div}(E' - V \wedge B) = \operatorname{div}(E') - \operatorname{div}(V \wedge B) \\ &= \operatorname{div}(E') - V \cdot \operatorname{rot}(B) \end{aligned}$$

Or l'on a pas toujours $-V \bullet \operatorname{rot}(B) = 0$, ce qui entraîne $\operatorname{div}(E) \neq \frac{\rho'}{\epsilon_0}$ alors que $\rho' = \rho$, ce qui est absurde. L'équation de Maxwell-Gauß n'est donc pas invariante par transformation de Galilée.

L'équation de Maxwell-Ampère

L'on s'intéresse à l'équation $\operatorname{rot}(B) = \mu_0 \left(j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$.

Dans un premier temps, il est utile de remarquer que le vecteur densité de courant j est défini par $j = \rho v$.

Ainsi il est possible d'exprimer j' de la manière suivante : $j' = \rho v' = \rho(v - V) = j - \rho V$.

Ce qui donne donc :

$$j = j' + \rho V$$

Sachant que $B = B'$, l'on peut écrire que :

$$\operatorname{rot}(B) = \mu_0 \left(j + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(j' + \rho V + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

Avec : $\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t'} - V \bullet (\nabla E)$, et $E = E' - V \wedge B$:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t'} - \frac{\partial}{\partial t} (V \wedge B) - (V \nabla) (E' - V \wedge B)$$

Finalement :

$$\operatorname{rot}(B) = \mu_0 \left(j' + \epsilon_0 \frac{\partial E'}{\partial t} \right) + \mu_0 (\rho V - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t'} (V \wedge B)) - \mu_0 \epsilon_0 (V \cdot \nabla) (E' - V \wedge B)$$

Les deux derniers termes sont la plupart du temps non nuls, ainsi nous pouvons conclure que l'équation de Maxwell-Ampère est non-invariante par transformée de Galilée.

La théorie de la relativité restreinte devient donc nécessaire pour bien décrire certains phénomènes tels que l'électromagnétisme, comme nous venons de le voir.

Chapitre 4

Les fondamentaux de la relativité restreinte

Soient deux référentiels $R(t, x, y, z)$ et $R'(t', x', y', z')$ en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre dans la direction des x et à la vitesse v , et coïncidant en $O = O'$ à $t = t' = 0$.

4.1 Les transformations de Lorentz

Soit un événement E de coordonnées (t_E, x_E, y_E, z_E) dans R . Ses coordonnées dans R' sont obtenues via les transformations suivantes, dites de Lorentz :

$$\begin{cases} ct'_E = \gamma(ct_E - \beta x_E) \\ x'_E = \gamma(x_E - \beta ct_E) \\ y'_E = y_E \\ z'_E = z_E \end{cases}$$

Où $\beta = \frac{v}{c}$ et γ est le facteur de Lorentz, présenté précédemment, et vaut $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

4.1.1 Lorentz : une conséquence de l'invariance de c

La non-invariance des équations de Maxwell par les transformations de Galilée (dans lesquelles le temps est uniforme) pose un problème. Ainsi, Lorentz et Poincaré ont développé une théorie considérant que les postulats de la mécanique classique sont faux.

Lorentz a cherché à créer de nouvelles transformations, basées sur la loi du changement de référentiel Galiléen dans laquelle les équations de physique, notamment les équations de Maxwell doivent être préservées, où la vitesse de la lumière est constante et où les orientations de l'espace et du temps sont conservées.

Le défi était donc de modifier la transformation de Galilée le moins possible, tout en introduisant le principe d'invariance de c .

Considérons deux systèmes $S\{x, y, z, t\}$ et $S'\{x', y', z', t'\}$. Ces deux référentiels sont en translation uniforme l'un par rapport à l'autre avec une vitesse uniforme v , de telle sorte que l'axe x de S coïncide avec l'axe x' de S' .

On cherche les équations reliant $\{x, y, z, t\}$ et $\{x', y', z', t'\}$. Elles doivent être linéaires du fait de l'homogénéité du temps et de l'espace. Enfin, l'origine du temps des deux repères est choisie au moment où les origines des coordonnées coïncident.

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} t = fx' + gt' \\ x = ax' + bt' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \quad (1)$$

a, b, f et g sont 4 constantes entièrement déterminées par conséquence de l'invariance de c , comme nous allons le voir.

Considérons un évènement situé en O' , l'origine de R' . $x' = y' = z' = 0$.

Ainsi, le système précédent devient

$$\begin{cases} t = gt' \\ x = bt' \implies x = \frac{b}{g}t \end{cases}$$

D'où $v = \frac{x}{t} = \frac{b}{g}$. On considère désormais deux évènements E et E' supposés infiniment voisins :

$$E : (x, y, z, t); (x', y', z', t')$$

$$E' : (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t); (x' + \Delta x', y' + \Delta y', z' + \Delta z', t' + \Delta t')$$

Exprimons v et v' les vitesses de la particule associée au même évènement E dans chaque repère.

$$v = \lim_{E' \rightarrow E} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t} \right)$$

$$v' = \lim_{E' \rightarrow E} \left(\frac{\Delta x'}{\Delta t'}, \frac{\Delta y'}{\Delta t'}, \frac{\Delta z'}{\Delta t'} \right)$$

Ainsi, on a :

$$\begin{cases} \Delta t = f\Delta x' + gt' \\ \Delta x = a\Delta x' + b\Delta t' \\ \Delta y = \Delta y' \\ \Delta z = \Delta z' \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{a\Delta x'}{\Delta t'} + b}{\frac{f\Delta x'}{\Delta t'} + g} \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\frac{a\Delta y'}{\Delta t'}}{\frac{f\Delta x'}{\Delta t'} + g} \quad \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\frac{a\Delta z'}{\Delta t'}}{\frac{f\Delta x'}{\Delta t'} + g}$$

En passant à la limite :

$$V_x = \frac{aV'_x + b}{fV'_x + g} \quad V_y = \frac{aV'_y}{fV'_x + g} \quad V_z = \frac{aV'_z}{fV'_x + g}$$

En additionnant le carré de ces équations, on trouve la norme de la vitesse totale au carré :

$$\begin{aligned} V^2 &= V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \\ &= \frac{(aV'_x)^2 + b^2 + 2abV'_x + V_y'^2 + V_z'^2}{(fV'_x + g)^2} \\ &= \frac{V'^2 + (a^2 - 1)V_x'^2 + 2abV'_x + b^2}{(fV'_x + g)^2} \end{aligned}$$

Désormais, si l'on considère un photon se propageant dans le vide, sachant que c est invariant :

$$c^2 = \frac{c^2 + (a^2 - 1)V_x'^2 + 2abV_x' + b^2}{(fV_x' + g)^2} \iff c^2(fV_x' + g)^2 = c^2 + (a^2 - 1)V_x'^2 + 2abV_x' + b^2$$

Dans cette équation, c, a, b, f et g sont des constantes. La seule variable est V_x' . Par identification entre les deux polynômes du second degré, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a^2 - 1 = c^2 f^2 \\ ab = c^2 fg \\ b^2 + c^2 = c^2 g^2 \end{cases} \quad (2)$$

On peut alors en déduire que le système initial (1) entraîne une loi de composition des vitesses compatible avec le principe d'invariance de c si les quatre constantes a, b, f et g obéissent au système (2).

Déterminons la valeur de chaque constante :

Rappelons que $\frac{b}{g} = v$

$$ab = c^2 fg \iff av = c^2 f \iff f = \frac{av}{c^2}$$

$$a^2 - 1 = c^2 f^2 \iff a^2 - 1 = c^2 \frac{a^2 v^2}{c^4} = \frac{a^2 v^2}{c^2} \iff a^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \iff a^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Ainsi, $a = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

On en déduit que $f = \pm \frac{v/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$$b^2 + c^2 = c^2 g^2 \iff v^2 g^2 + c^2 = c^2 g^2 \iff g^2(c^2 - v^2) = c^2 \iff g^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2}$$

Ainsi, $g = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

On en déduit que $b = \pm \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Or, si $v \rightarrow 0$, $t = t'$ donc $g \rightarrow 1$. Ainsi, $g > 0$ et $b > 0$.

De même, $a \rightarrow 1$. Ainsi, $a > 0$ et $f > 0$.

Finalement, on trouve comme valeurs des quatre constantes :

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad b = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad f = \frac{v/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad g = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Notons $\beta = \frac{v}{c}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, le facteur de Lorentz. Alors les transformations de Lorentz deviennent :

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

4.1.2 Autrement dit : le raisonnement d'Einstein

Une autre manière de retrouver les transformations de Lorentz est de partir de celles de Galilée, et d'avoir l'audace de penser que le temps n'est pas absolu - et donc non invariant par changement de référentiel. C'est ce que fit Albert Einstein, en introduisant une constante à déterminer. Reprenons son raisonnement.

On pose deux référentiels R et R' en mouvement l'un par rapport à l'autre selon leurs axes des abscisses à une vitesse de valeur absolue égale à v : vitesse $\left(\frac{R'}{R}\right)_x = v$ et vitesse $\left(\frac{R}{R'}\right)_{x'} = -v$. Les deux référentiels coïncident à $t = 0$ en leurs origines respectives O et O' .

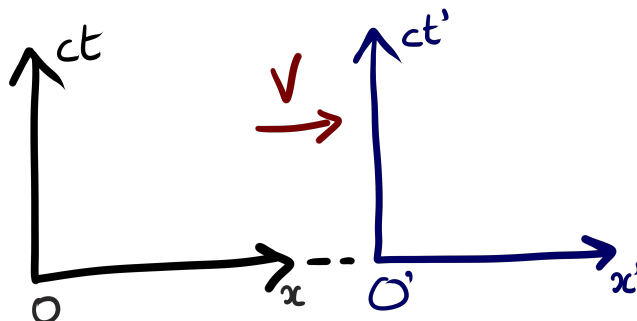


FIGURE 4.1 – Référentiels

Enfin, Einstein considère que Galilée est correct à un facteur λ près : il part donc du système suivant, en considérant les deux référentiels comme jouant des rôles symétriques

$$\begin{cases} x' = \lambda_v(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' \neq t \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda_{-v}(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

Prouvons d'abord que $\lambda_v = \lambda_{-v}$. En reprenant nos deux référentiels et en les complétant par des axes virtuels \vec{u} et \vec{u}' opposés à \vec{x} et \vec{x}' , on obtient une nouvelle base, dans laquelle vitesse $\left(\frac{R'}{R}\right)_u = -v$.

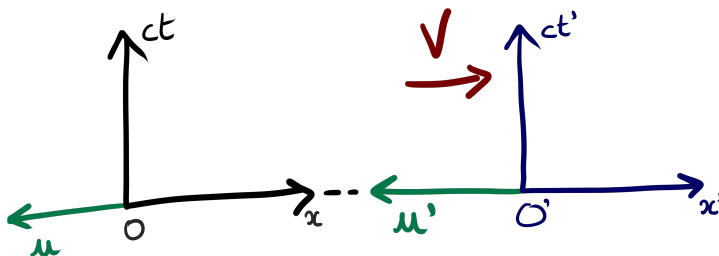


FIGURE 4.2 – Référentiels complétés par des axes \vec{u}

Exprimons la première ligne des transformations dans cette nouvelle base :

$$\begin{aligned} u' &= \lambda_{-v}(u + vt) \\ \iff -x' &= \lambda_{-v}(-x + vt) \\ \iff x' &= \lambda_{-v}(x - vt) = \underbrace{\lambda_v(x - vt)}_{\text{par définition}} \end{aligned}$$

donc $\lambda_v = \lambda_{-v}$.

Intéressons-nous maintenant à un flash lumineux partant à $t = 0$ de l'origine commune des deux référentiels. Sa vitesse est c , donc dans chacun des référentiels, on peut appliquer distance parcourue = vitesse \times temps de parcours.

$$\begin{cases} x_{flash} = ct = \lambda(x' + vt') = \lambda(ct' + vt') = t'\lambda(c + v) \\ x'_{flash} = ct' = \lambda(x - vt) = \lambda(ct - vt) = t\lambda(c - v) \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{1}{tt'}}_{=c^2} (ct \times ct') &= \frac{1}{tt'} (t'\lambda(c + v) \times t\lambda(c - v)) = \lambda^2 (c^2 - v^2) \\ \iff c^2 &= \lambda^2 (c^2 - v^2) \\ \iff \lambda &= \pm \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{aligned}$$

Ce qui correspond bien à l'expression de γ le coefficient de Lorentz. Le signe de λ se déduit simplement : s'il était négatif, $x' \xrightarrow{v \rightarrow 0} -|\lambda|x$, ce qui est absurde. La relation entre les deux temps se déduit de celle sur les coordonnées spatiales : c'est ainsi que le célèbre physicien a retrouvé les fameuses transformations de Lorentz.

4.2 Loi de composition des vitesses

Considérons deux référentiels R et R' . R' est en translation rectiligne uniforme selon l'axe x par rapport à R et se déplace à une vitesse u . Soit un objet dans R' en translation rectiligne uniforme selon l'axe x , se déplaçant à une vitesse v' par rapport à R' .

D'après les transformations de Lorentz :

$$\begin{cases} ct' = \gamma \left(ct - \frac{u}{c}x \right) \\ x' = \gamma (x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Or une composante de la vitesse est la dérivée de la coordonnée correspondante par rapport au temps.

$$v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt}$$

Commençons par différencier la transformation de Lorentz :

$$\begin{cases} cdt' = \gamma \left(cdt - \frac{u}{c}dx \right) & (1) \\ dx' = \gamma (dx - udt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases}$$

En divisant chaque composante par la relation (1), on obtient :

$$\begin{aligned}v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = c \frac{dx - udt}{cdt - \frac{u}{c}dx} = c \frac{\frac{dx}{dt} - u}{c - \frac{u}{c} \frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} \\v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{c}{\gamma} \frac{dy}{cdt - \frac{u}{c}dx} = \frac{c}{\gamma} \frac{\frac{dy}{dt}}{c - \frac{u}{c} \frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_y}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} \\v'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{c}{\gamma} \frac{dz}{cdt - \frac{u}{c}dx} = \frac{c}{\gamma} \frac{\frac{dz}{dt}}{c - \frac{u}{c} \frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_z}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}\end{aligned}$$

Par symétrie, après un changement de u (vitesse de R'/R) en $-u$ (vitesse de R/R') :

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{v'_x + u}{1 - \frac{u}{c^2}v'_x} \\v_y &= \frac{1}{\gamma} \frac{v'_y}{1 - \frac{u}{c^2}v'_x} \\v_z &= \frac{1}{\gamma} \frac{v'_z}{1 - \frac{u}{c^2}v'_x}\end{aligned}$$

On notera, si u et v' colinéaires :

$$v = v' \oplus u = \frac{v' + u}{1 - \frac{v'u}{c^2}}$$

4.3 Le diagramme de Minkowski

Construction et utilisation du diagramme

Ce diagramme permet de retrouver facilement les coordonnées d'un événement dans deux référentiels différents.

Pour construire ce diagramme, il faut placer x en abscisse et ct en ordonnée. Il faut ensuite tracer les deux droites suivantes

$$\begin{cases} ct' : & x = \beta ct \\ x' : & ct = \beta x \end{cases}$$

Soit un événement E de coordonnées (ct_E, x_E) dans R . Ses coordonnées (ct'_E, x'_E) dans R' s'obtiennent de la manière suivante :

- Pour ct'_E il faut prendre le projeté de E sur ct' parallèlement à x' .
- Pour x'_E il faut prendre le projeté de E sur x' parallèlement à ct' .

Voici ce que cela donne lorsqu'il est dessiné :

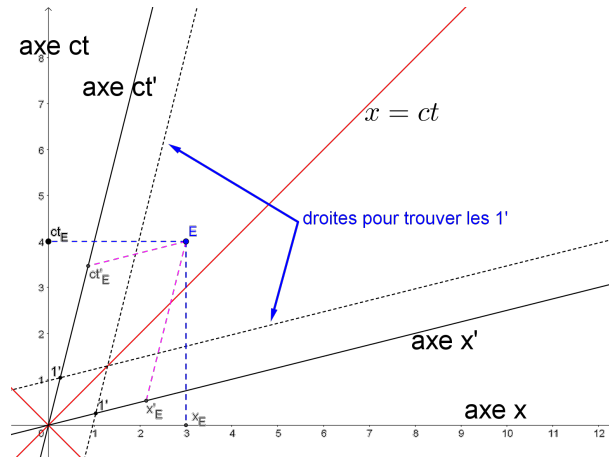


FIGURE 4.3 – Un diagramme de Minkowski

On dira que deux événements sont simultanés dans R si ceux-ci ont la même ordonnée. Deux événements sont simultanés dans R' s'ils appartiennent tous deux à une même droite parallèle à x' .

On appellera la droite d'équation $x = ct$ ligne d'univers du photon. Enfin, on notera que l'angle α entre x et x' a la même valeur que l'angle entre ct et ct' et vaut $\alpha = \arctan(\beta)$.

Lien entre les transformations de Lorentz et le diagramme de Minkowski

Le diagramme de Minkowski peut se construire à partir des transformations de Lorentz :

- L'axe ct' est celui pour lequel x' vaut 0, ce qui donne

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \Rightarrow \gamma(x - \beta ct) = 0 \Leftrightarrow x = \beta ct$$

- L'axe x' est celui pour lequel ct' vaut 0, ce qui donne

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \Rightarrow \gamma(ct - \beta x) = 0 \Leftrightarrow ct = \beta x$$

Pour retrouver mathématiquement les graduations des axes x' et ct' il faut aussi passer par les transformations de Lorentz. Pour trouver par exemple $(0, 1)'$, il faut résoudre

$$\begin{cases} 1 = \gamma(ct - \beta x) \\ 0 = \gamma(x - \beta ct) \end{cases}$$

Ce qui se fait très simplement de manière graphique (voir schéma ci-dessus).

4.4 Diagonalisation des transformations de Lorentz et intervalle d'espace-temps

Les transformations de Lorentz sont caractérisés par une forme linéaire L de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^4 , on peut donc définir sa matrice canonique qui vaut

$$M = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne bien

$$\begin{pmatrix} ct'_1 \\ x'_1 \\ y'_1 \\ z'_1 \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} ct_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} ct_1 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Intéressons nous maintenant à la matrice M' , matrice canonique de L' défini par

$$M' = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

Puisque cette matrice est symétrique, elle admet d'après le théorème spectral 2 valeurs propres réelles et est donc diagonalisable sur \mathbb{R} . Calculons-les :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(M' - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} \gamma - \lambda & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{\gamma^2 - \beta^2\gamma^2}_{=1} - 2\lambda\gamma + \lambda^2 = 1 - 2\lambda\gamma + \lambda^2 \end{aligned}$$

La résolution du polynôme caractéristique de M' , de discriminant $\Delta = 4\beta^2\gamma^2$ nous donne comme racines $\lambda_1 = \gamma(1 - \beta)$ et $\lambda_2 = \gamma(1 + \beta)$ qui sont également valeurs propres de M' .

On trouve ensuite deux vecteurs propres libres de M' , comme

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ associé à } \lambda_1 \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ associé à } \lambda_2$$

On en déduit donc une base B' formée de ces deux vecteurs et telle que la matrice exprimée dans cette base est diagonale. Appelons D' la matrice de L' dans B' , on a

$$D' = \begin{pmatrix} \gamma(1 - \beta) & 0 \\ 0 & \gamma(1 + \beta) \end{pmatrix}$$

Ce qui donne pour L exprimée dans la base B définie par

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

une matrice diagonale D qui vaut

$$D = \begin{pmatrix} \gamma(1 - \beta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(1 + \beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4.1 L'invariance de l'intervalle d'espace-temps

Nous allons montrer que pour tout référentiel R' , la relation $x'^2 - (ct')^2 = x^2 - (ct)^2$ est vraie :

$$\begin{cases}
x' = \gamma(ct - \beta x) \\
ct' = \gamma(x - \beta ct) \\
x'^2 = \gamma^2((ct)^2 - \beta xct + \beta^2 x^2) \\
(ct')^2 = \gamma^2(x^2 - \beta xct + \beta^2 (ct)^2) \\
x'^2 - (ct')^2 = (x^2 - (ct)^2)(\gamma^2 - \gamma^2\beta^2) \\
x'^2 - (ct')^2 = x^2 - (ct)^2
\end{cases}$$

On définira l'intervalle espace-temps s_{12} , une grandeur qui peut être réelle ou purement imaginaire et vaut

$$\begin{aligned}
s_{12}^2 &= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 \\
&= c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2
\end{aligned}$$

On remarquera que cette grandeur est la même pour tous événements $E_1(t_1, x_1)$ et $E_2(t_2, x_2)$ peu importe le référentiel dans lequel on se place. On peut donc l'assimiler à une norme absolue. On dira que :

- L'intervalle est du genre espace si $s_{12}^2 < 0$.
- L'intervalle est du genre temps si $s_{12}^2 > 0$.
- L'intervalle est du genre lumière si $s_{12}^2 = 0$.

4.4.2 Interprétations de l'intervalle d'espace-temps

Visualisation graphique

Posons une nouvelle base $E = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ telle que $E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$,
 $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$ et $E_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$. On se limitera à l'étude des événements appartenant au plan $(c\Delta t, \Delta x)$, ce qui réduit l'expression de la base E à

$$\begin{aligned}
(E_1 \ E_2) &= \begin{pmatrix} c\Delta t & 0 \\ 0 & \Delta x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} E_1 = \frac{1}{2}c\Delta t + \frac{1}{2}\Delta x \\ E_2 = \frac{1}{2}c\Delta t - \frac{1}{2}\Delta x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} E_1 + E_2 = c\Delta t \\ E_1 - E_2 = \Delta x \end{cases} \\
&\iff s_{12} = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (E_1 - E_2)^2 = 4E_1E_2
\end{aligned}$$

Et tout événement possédant des coordonnées dans la base E voit son intervalle d'espace-temps par rapport à l'origine se réduire au quadruple du produit de ses coordonnées dans cette base, soit, dans un diagramme de Minkowski, le quadruple de l'aire du rectangle suivant :

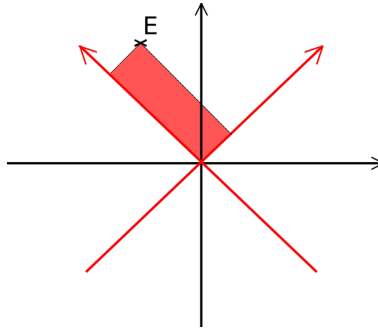


FIGURE 4.4 – Visualisation de l'intervalle espace-temps

Interprétation physique

Trois points de vue sont adéquats pour comprendre la division de l'intervalle d'espace-temps en trois cas.

Premièrement, la définition $s_{12} = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ implique que le signe de s_{12} dépend d'une prévalence d'un des termes : aussi, si « l'espace » prévaut sur le « temps », le Δx sera de plus fort poids que $c\Delta t$ et le signe sera négatif, donc bien un genre espace, et vice-versa. Cependant, cette vision en terme de jeux d'équilibre ne va pas jusqu'à expliquer le genre « lumière ».

En remarquant que $c\Delta t$ correspond à la distance parcourue par une particule allant à la vitesse de la lumière en un temps Δt , on peut comprendre s_{12} comme un écart entre la distance géométrique entre deux évènements et la distance parcourue par un photon dans l'intervalle de temps séparant ces deux évènements. Ainsi, le cas d'égalité traduit une situation où les deux évènements ne sont joignables que par un photon : tout lien de causalité est donc dû à l'interaction lumineuse, d'où l'appellation « lumière ». Remarquons que contrairement au genre « temps », dans le genre « espace », la causalité est impossible : la distance entre les deux évènements ne peut être parcourue à $v = c$.

Enfin, à l'aide des diagrammes de Minkowski, une répartition géométrique des cas est possible :

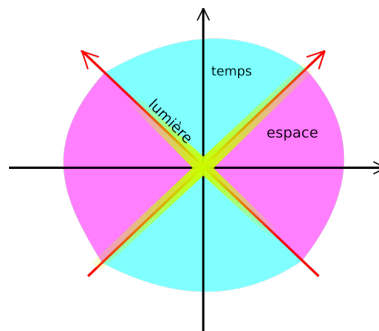


FIGURE 4.5 – Interprétation physique de l'intervalle espace-temps

On peut également noter que pour un évènement ayant un intervalle d'espace-temps de genre espace, il est impossible de trouver une vitesse inférieure en norme à c pour laquelle le repère associé dans le diagramme de Minkowski indique une simultanéité entre l'origine et cet évènement, et vice versa pour un genre temps. Enfin, il est possible de trouver une vitesse - donc un repère dans le diagramme de Minkowski - pour lequel s_{12} est une distance (si c 'est un genre espace) ou une durée (si c 'est un genre temps) : il suffit de prendre pour axe la direction \overrightarrow{OE} . Ces trois manières de voir sont complémentaires et liées.

4.5 Une autre approche : la trigonométrie hyperbolique

4.5.1 Introduction à la trigonométrie hyperbolique

Analogies

Inventée par le jésuite Vincenzo Rocatti en 1760, la trigonométrie hyperbolique a permis de calculer l'aire sous la courbe d'une hyperbole. Les notions d'angles et de rapidité de cette théorie correspondent mieux à l'étude de la relativité restreinte que la géométrie euclidienne, c'est pourquoi nous allons l'utiliser.

Présentons d'abord quelques analogies entre cette nouvelle trigonométrie et son homologue classique :

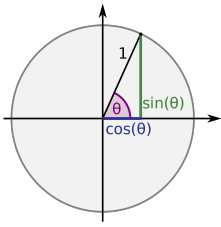
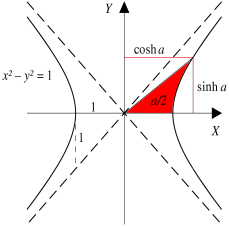
trigonométrie circulaire	trigonométrie hyperbolique
$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
	
rotation circulaire d'angle θ : $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$	rotation hyperbolique d'angle θ : $\begin{pmatrix} \cosh(\theta) & -\sinh(\theta) \\ -\sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$ $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$ $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$ $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$	$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$ $\cosh(x-y) = \cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y)$ $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x)$ $\sinh(x-y) = \sinh(x)\cosh(y) - \sinh(y)\cosh(x)$ $\cosh^2(x) = \frac{1}{2}(\cosh(2x) + 1)$ $\sinh^2(x) = \frac{1}{2}(\cosh(2x) - 1)$
paramétrisation d'un cercle $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi[$	paramétrisation d'une branche d'hyperbole $\begin{cases} x = \cosh(t) \\ y = \sinh(t) \end{cases} \quad t \in]-\infty; +\infty[$

TABLE 4.1 – Analogies trigonométrie circulaire / trigonométrie hyperbolique

Il est important d'avoir à l'esprit que si le cercle est paramétré dans son entier par cos et sin, les hyperboles ne peuvent être paramétrées que par branches en fonction de leur position dans un quadrant. On a ici présenté la branche d'abscisses et d'ordonnées positives : pour obtenir les 3 autres, il suffit d'ajuster les signes de x et y , ce qui revient à faire des symétries selon les axes du repère.

Représentation

En remarquant que $\begin{cases} \cosh(it) = \cos(t) \\ \sinh(it) = \sin(t) \end{cases}$ par les formules d'Euler, on peut écrire

$$\cosh(x + iy) = \cosh(x) \cos(y) + \sinh(x) \sin(y)$$

$$\sinh(x + iy) = \sinh(x) \cos(y) + \sin(y) \cosh(x)$$

et ainsi tracer ces fonctions comme allant de \mathbb{C} dans \mathbb{R} . En 3D, avec l'axe rouge représentant les parties réelles et vert les parties imaginaires, on a donc

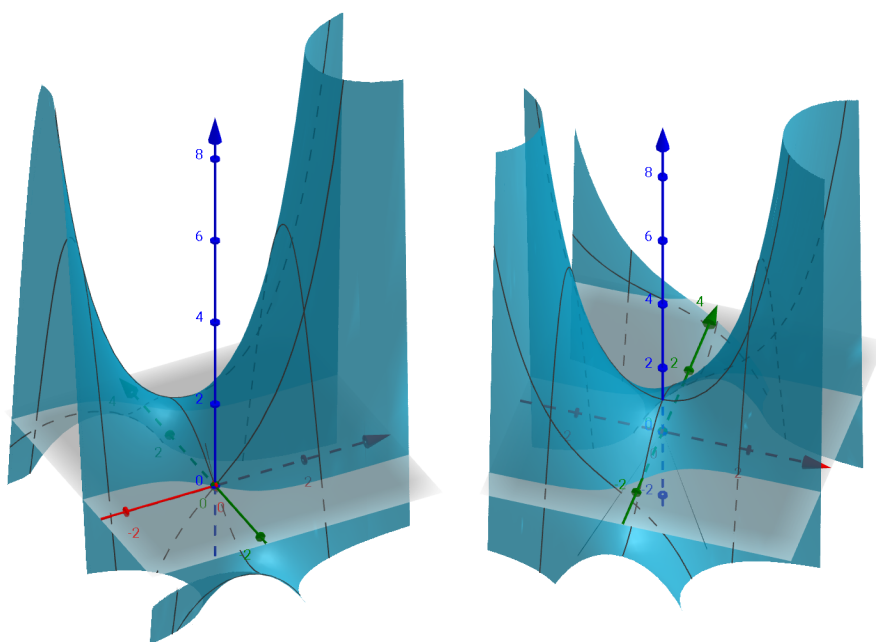


FIGURE 4.6 – Représentation de sinh et cosh

4.5.2 γ et β en fonction des relations hyperboliques

On a

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \implies \gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \implies \gamma^2 - (\gamma\beta)^2 = 1$$

Or, $\gamma > 0$. Le point $(x; y)$ se situe sur l'hyperbole unitaire $x^2 - y^2 = 1$, avec $x > 0$:

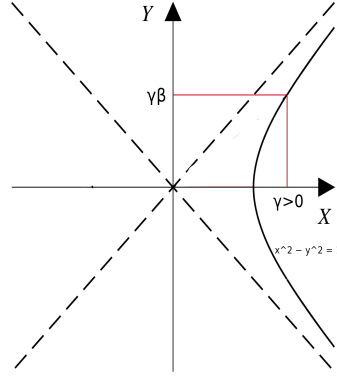


FIGURE 4.7 – γ et $\gamma\beta$ sur la courbe $x^2 - y^2 = 1$ avec $x > 0$

Il existe donc θ tel que :

$$\begin{aligned}\cosh(\theta) &= \gamma \\ \sinh(\theta) &= \gamma\beta\end{aligned}$$

Nous pouvons donc réécrire les transformations de Lorentz sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & -\sinh(\theta) \\ -\sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Les transformations de Lorentz sont en réalité une rotation hyperbolique d'angle θ dans l'espace-temps de Minkowski.

4.5.3 Addition des rapidités et définition de l'addition des vitesses

En galiléen, les vitesses de référentiels en mouvement relatifs s'additionnent classiquement : qu'en est-il dans un modèle relativiste ?

Considérons un référentiel R . Soit θ_v la rapidité associée à un évènement se produisant dans un référentiel R_v en mouvement uniforme de vitesse v par rapport à R , et $\theta_{v'}$ son homologue pour un référentiel $R_{v'}$ en mouvement uniforme de vitesse v' par rapport à R . On a donc

$$\begin{cases} c \tanh(\theta_v) = v \\ c \tanh(\theta_{v'}) = v' \end{cases}.$$

On a vu précédemment que pour deux vitesses colinéaires comme le sont v et v' , on définit $w = v \oplus v' = \frac{v+v'}{1+\frac{vv'}{c^2}}$.

Posons un référentiel R_w dont la rapidité est θ_w , et cherchons le lien entre θ_w , θ_v et $\theta_{v'}$.

$$\begin{aligned}c \tanh(\theta_w) &= w = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} \\ &= \frac{c \tanh(\theta_v) + c \tanh(\theta_{v'})}{1 + \tanh(\theta_v) \tanh(\theta_{v'})} \\ &= c \left(\frac{\sinh(\theta_v) \cosh(\theta_{v'})}{\cosh(\theta_v) \cosh(\theta_{v'})} + \frac{\sinh(\theta_{v'}) \cosh(\theta_v)}{\cosh(\theta_v) \cosh(\theta_{v'})} \right) \times \left(1 + \frac{\sinh(\theta_v) \sinh(\theta_{v'})}{\cosh(\theta_v) \cosh(\theta_{v'})} \right)^{-1} \\ &= c \frac{\sinh(\theta_v) \cosh(\theta_{v'}) + \sinh(\theta_{v'}) \cosh(\theta_v)}{\cosh(\theta_v) \cosh(\theta_{v'}) + \sinh(\theta_v) \sinh(\theta_{v'})} \\ &= c \frac{\sinh(\theta_v + \theta_{v'})}{\cosh(\theta_v + \theta_{v'})} \\ &= c \tanh(\theta_v + \theta_{v'})\end{aligned}$$

Par identification, on a $\theta_w = \theta_v + \theta_{v'}$

4.6 Tenseurs : pour aller vers la quantité de mouvement

On définira pour ce rapport la notion de tenseur ainsi : une collection $T_R(E)$ de 4 données qui décrivent un évènement E dans un certain référentiel R , et qui, si \mathcal{L} est la matrice de Lorentz utilisée comme matrice de changement de base de R vers R' , respectent la relation suivante :

$$T_{R'}(E) = \mathcal{L}(R \rightarrow R') \times T_R(E)$$

La quadrivitesse

Par analogie avec la vitesse galiléenne, la quadrivitesse se définit comme la variation temporelle d'un quadrivecteur coordonnées (ct, x, y, z) . Cependant, celle que nous allons étudier n'est pas une variation des coordonnées d'une particule M dans un référentiel R par rapport au temps de R , mais par rapport au temps de R' . Posons donc :

- deux référentiels R et R' en mouvement l'un par rapport à l'autre à une vitesse v , qui coïncident à $t = 0$.
- t le temps associé à R et τ le temps associé à R' .
- une particule M fixe dans R' , repérée par son vecteur position \vec{r} dans R .

On a l'intervalle d'espace-temps $ds^2 = c^2 dt^2 - v^2 dt^2 = c^2 d\tau^2 + 0$ d'où $dt^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} d\tau^2$ et $dt = \gamma(v) d\tau$. On peut donc, comme promis, définir un vecteur $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} \times \frac{d\tau}{dt} = v \times \gamma(v)$.

Ainsi, la quadrivitesse

$$\vec{U} = \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \frac{dt}{d\tau} \\ v_x \gamma(v) \\ v_y \gamma(v) \\ v_z \gamma(v) \end{pmatrix} = \gamma(v) \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

a pour norme (en utilisant la norme définie par Δs^2)

$$\|\vec{U}\|^2 = U^2 = U_0^2 - U_1^2 - U_2^2 - U_3^2 = (\gamma(v))^2 (c^2 - v^2) = \frac{1}{1 - (\frac{v}{c})^2} (c^2 - v^2) = c^2$$

une constante indépendante de v , donc du référentiel dans lequel on la calcule. Cette propriété en fait un tenseur, donc un meilleur candidat pour une quantité de mouvement que la simple vitesse (c, \vec{v}) sans multiplication par un $\gamma(v)$; en effet, la norme de cette « simple » vitesse dépend du référentiel.

Définition de la quantité de mouvement relativiste

On cherche une expression homogène à une énergie qui soit invariante par changement de référentiel. La quadrivitesse \vec{U} définie ci-dessus fournit l'élément analogue à la vitesse galiléenne; la masse est fort heureusement invariante par changement de référentiel, et se passe donc de substituer; enfin, pour obtenir une expression homogène à masse×vitesse², on multiplie par c . On définit ainsi

$$\vec{P}_R = mc\vec{U}_R = \begin{pmatrix} mc^2\gamma(v) \\ mc\vec{v}\gamma(v) \end{pmatrix}$$

On remarque que la coordonnée d'indice 0 correspond à l'énergie E de la particule, et que l'ensemble des trois autres coordonnées peut s'écrire comme $c\vec{p}_R$ avec $\vec{p}_R = \gamma(v) m\vec{v}$ la quantité de mouvement usuelle dans R (on rappelle que la définition de la quadrivitesse comme dérivée de coordonnées de R par rapport au temps de R' ajoute le $\gamma(v)$).

Enfin, le calcul de la norme est indépendant du référentiel, et établit l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \left\| \vec{P}_R \right\| &= m^2 c^2 \left\| \vec{U}_R \right\| = m^2 c^4 \\ \iff E^2 - c^2 p_R^2 &= m^2 c^4 \end{aligned}$$

Et on peut au passage admirer qu'au repos, $p_R = 0 \implies E = mc^2$. Sur ce clin d'œil, nous concluons cette partie, qui a eu pour but d'explorer les fondements de la relativité restreinte en s'attachant à donner plusieurs points de vue mathématiques comme physiques sur les équations rencontrées.

4.7 Conclusion

Au terme de cette étude aux ambitions exhaustives, nous avons découvert les bases d'un paradigme admis au début du XX^e siècle. Depuis, la physique s'est épanouie : la relativité générale, la physique quantique, les perspectives apportées par les outils numériques sont autant de champs d'exploration pour de futurs projets.