

Étude d'un problème d'éolienne face au vent



Étudiants :

Rafaël QUIBLIER
Ambre BAFFERT
Valentine ROLLAND
Hugo BRENIER
Ghali BENNANI
Adrien POCHET

Enseignant-responsable du projet :

Bernard GLEYSE

Date de remise du rapport : 23/06/2019

Référence du projet : STPI/P6/2019 – 010

Intitulé du projet : Etude d'un problème d'éolienne face au vent

Type de projet : Bibliographie et modélisation

Objectifs du projet :

- étudier théoriquement le comportement d'une éolienne face à différents vents.
- apprentissage de différentes méthodes d'approximation mathématiques
- amélioration de nos connaissances de codage
- apprendre à gérer un projet
- amélioration de notre autonomie

Mots-clés du projet : Code Pascal, Modélisation, Mécanique

Table des matières

Introduction	3
Organisation du travail	4
1 Moment d'inertie[1]	5
1.1 Calcul du moment d'inertie d'une éolienne bipale	5
1.2 Calcul du moment d'inertie d'une éolienne tripale	6
2 Recherches des méthodes théoriques	7
2.1 Problème de Cauchy[4]	7
2.2 Méthode de résolution réelle	7
2.3 Méthodes d'Euler[3]	8
2.3.1 Explicite	8
2.3.2 Implicite	8
2.4 Méthode du Point milieu[2]	9
3 Résultats et Analyse	10
3.1 Etude des méthodes pour un vent constant	10
3.2 Etude des méthodes pour une rafale de vent	11
3.2.1 Résolution théorique	11
3.2.2 Graphiques	12
Conclusion et perspectives	14
Annexes	22

Introduction

Ces dernières années, le développement d'énergies propres et durables est devenu une nécessité afin de réduire l'utilisation d'énergies fossiles (charbon, gaz, pétrole) vouées à disparaître. Cette nécessité devient de plus en plus urgente au vu des problèmes environnementaux auxquels notre planète est confrontée de nos jours. L'énergie éolienne représente une alternative très prometteuse, étant peu coûteuse et rentable dans les régions avec de forts vents. Notre travail s'est donc porté sur l'étude du comportement d'une éolienne face au vent. Autrement dit, nous avons étudié l'équation résultant de l'application du principe fondamental de la dynamique sur une éolienne. Dans un premier temps, nous étudierons le moment d'inertie, un des termes qui constitue l'équation différentielle, pour ensuite nous pencher sur la résolution de l'équation de la vitesse de l'éolienne en fonction du vent par le biais de différentes méthodes. Nous effectuerons cette étude pour différentes situations (vent constant ou rafale).

Organisation du travail

Tout d’abord, nous avons commencé à nous renseigner sur le sujet des éoliennes afin de cerner le sujet et de cibler nos problèmes. Nous avons donc décidé de séparer notre projet en deux sous parties. D’une part l’étude de la vitesse de l’éolienne avec l’équation de la vitesse obtenue par le Principe Fondamental de la Dynamique, et d’une autre part l’étude du moment d’inertie. Compte tenu de la difficulté d’obtention de l’équation de la vitesse de l’éolienne, celle-ci nous a été fournie par Monsieur GLEYSE.

Notre travail s’est donc porté dans un premier temps sur la recherche de méthodes d’approximation afin de résoudre cette équation, puis sur le codage de ces méthodes en Pascal, pour terminer avec l’analyse des résultats et la rédaction du rapport. Nous décidions des tâches à effectuer et de leur répartition lors des séances obligatoires. Si celles-ci n’étaient pas terminées au terme de la séance, nous les terminions chez nous pour la séance suivante. De surcroît, nous avons rencontré quelques difficultés avec l’utilisation du logiciel Gnuplot lors de l’affichage des graphiques sur nos ordinateurs personnels. Cependant nous avons réussi à palier rapidement ce problème. La rédaction du rapport sur Latex a demandé une certaine formation de chacun au logiciel, ce qui a conduit par moment à quelques difficultés.

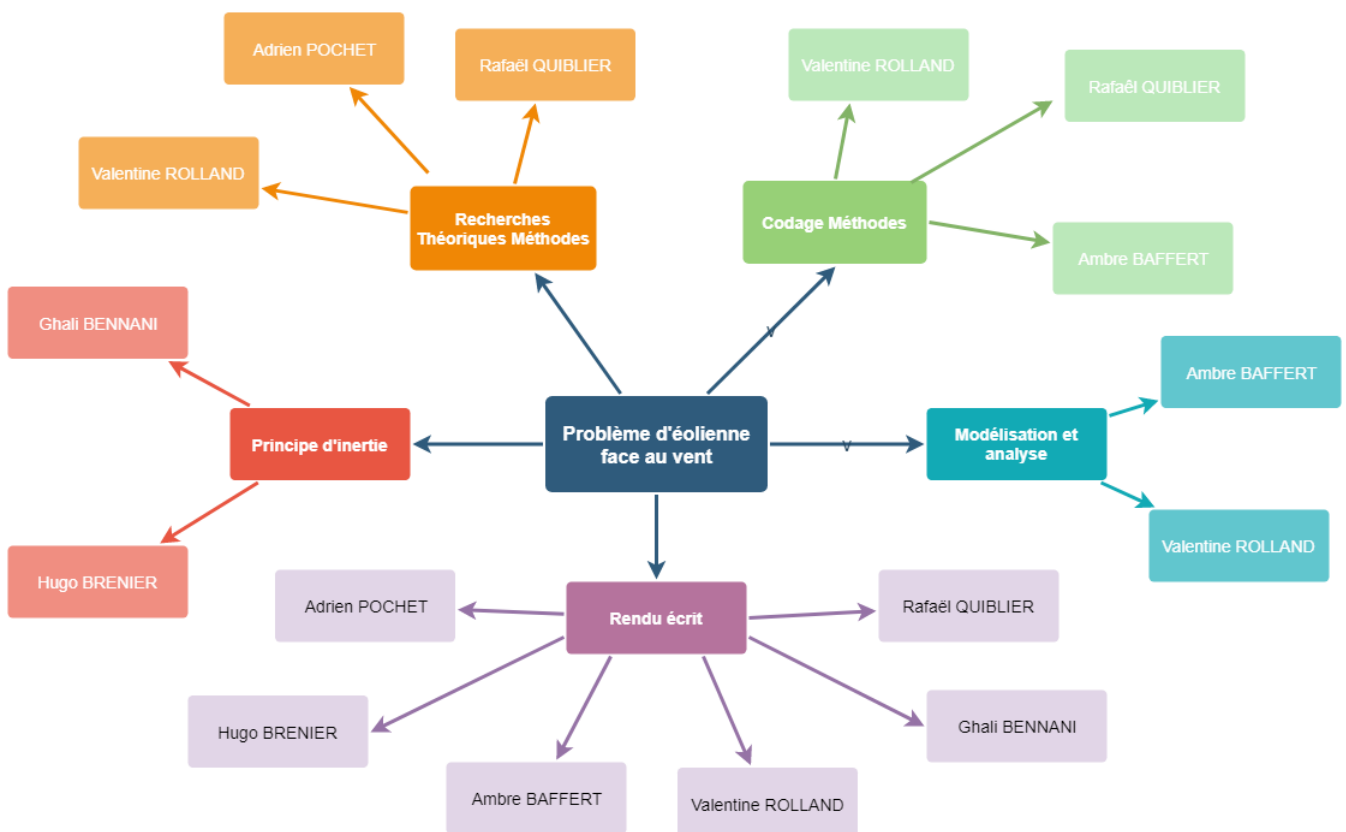


FIGURE 1 – Organigramme des tâches réalisées

Chapitre 1

Moment d'inertie[1]

Le moment d'inertie est une grandeur physique qui caractérise la géométrie des masses d'un solide, c'est-à-dire la répartition de la matière en son sein. Il quantifie également la résistance à une mise en rotation de ce solide.

Le moment d'inertie correspond au $J(c)$ dont nous avons besoin dans l'équation différentielle pour trouver la vitesse des pâles. La valeur numérique de ce moment d'inertie nous a été donné au préalable. Cependant, nous avons voulu comprendre cette valeur et savoir la calculer.

Pour déterminer le moment d'inertie d'un système Σ par rapport à un axe Δ , on utilise la formule suivante :

$$I_{\Delta} = \int \int \int M H^2 dm$$

Où M est un point à étudier et H son projeté sur l'axe Δ et dm est la masse d'un tout petit élément de Σ . Dans notre cas, on considère les pâles de l'éoliennes comme étant des tiges. Ainsi, notre système est considéré linéique.

$I_{\Delta} = \int_0^M x^2 dm$ où x est la distance entre le point M et l'origine de l'éolienne.

1.1 Calcul du moment d'inertie d'une éolienne bipale

Dans le cadre d'une éolienne bipale, on cherche à déterminer dm , un élément de masse infiniment petit du système Σ . Soit r la longueur de la pale. Calculons dm :

$$\begin{aligned} dm &= \rho dx \\ \Leftrightarrow \int_0^M dm &= \int_{-r}^r \rho dx \\ \Leftrightarrow M &= \rho 2r \\ \Leftrightarrow \rho &= \frac{M}{2r} \end{aligned}$$

Ensuite, on remplace dm et ρ par leurs expressions dans la formule du moment d'inertie.

$$\begin{aligned}
 I\Delta &= \int_0^M x^2 dm \\
 &= \int_{-r}^r x^2 \rho dx \\
 &= \frac{M}{2r} \int_{-r}^r x^2 dx \\
 &= \frac{M}{2r} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r \\
 &= \frac{M}{2r} \left(\frac{r^3}{3} + \frac{r^3}{3} \right) \\
 &= \frac{1}{3} r^2 M
 \end{aligned}$$

1.2 Calcul du moment d'inertie d'une éolienne tripale

De la même manière pour une éolienne tripale, dm devient :

$$\begin{aligned}
 dm &= \rho dx \\
 \Leftrightarrow \int_0^M dm &= \int_{-r}^r \rho dx \\
 \Leftrightarrow M &= \rho r \\
 \Leftrightarrow \rho &= \frac{M}{r}
 \end{aligned}$$

De même, on en conclut le calcul du moment d'inertie :

$$\begin{aligned}
 I\Delta &= \int_0^M x^2 dm \\
 &= \int_0^r x^2 \rho dx \\
 &= \frac{M}{r} \int_0^r x^2 dx \\
 &= \frac{M}{r} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^r \\
 &= \frac{M}{r} \times \frac{r^3}{3} \\
 &= \frac{1}{3} r^2 M
 \end{aligned}$$

L'angle entre les 3 pâles étant exactement égal à $\frac{2\pi}{3}$, pour calculer le moment d'inertie des 3 pâles, il suffit de multiplier par 3.

Ainsi,

$$I\Delta_{tot} = 3I\Delta = Mr^2$$

Chapitre 2

Recherches des méthodes théoriques

Tout d'abord, afin d'utiliser différentes méthodes de résolution de notre équation, nous devons nous assurer que notre problème est bien résoluble. Nous devons donc assimiler notre problème à quelque chose de connu. Nous le résolverons ensuite à l'aide de différentes méthodes dans le but de comparer leurs précisions. Au départ, nous avons l'équation suivante :

$$J \frac{du(t)}{dt} = -c_2 + c_0 v(t) - (c_1 + c_4) u(t) - c_3 (u(t))^2$$

$u(t)$ est la vitesse de l'éolienne cherchée, $v(t)$ est la vitesse du vent et les c_i sont des constantes. On peut écrire cette équation sous la forme d'un polynôme :

$$f(u, t) = a(t) + bu + cu^2 = u'(t)$$

2.1 Problème de Cauchy[4]

Notre problème initial étant un problème de Cauchy, nous nous sommes renseignés sur ce dernier pour définir nos objectifs et trouver le point de départ du projet. Avant tout, nous avons besoin de quelques définitions :

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On appelle solution de l'équation différentielle $y' = F(t, y)$, tout couple (J, y) où $J \subset I$ est un sous-intervalle de I et y une fonction dérivable définie sur J telle que $\forall t \in J, y'(t) = F(t, y(t))$.

La définition d'un problème de Cauchy est la suivante "Soit $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On appelle solution du problème de Cauchy associé à la donnée (t_0, y_0) toute solution (J, y) de $y_0 = F(t, y)$ vérifiant de plus $t_0 \in J$, et $y(t_0) = y_0$ ". Un problème de Cauchy consiste à résoudre une équation différentielle. La solution de cette équation est une fonction. Une équation différentielle a un ordre n qui correspond à la dérivée n -ième la plus élevée. Cette fonction y recherchée est donc C^n sur un certain intervalle J . Une équation différentielle d'ordre 1 sera donc de la forme $y'(t) = f(t, y)$ car la fonction y que l'on cherche est dérivée une fois maximum (ex : $y'(t) = 2t$).

Dans un problème de Cauchy, nous disposons ou on pose une condition initiale $y(t_0) = y_0$ avec $t_0 \in J$ (ex : $y(t_0) = y_0 = 2$). Si on reprend l'exemple précédent, toutes les fonctions de la forme $y(t) = t^2 + \text{constante}$ résolvent l'équation, mais grâce à la condition initiale, on en déduit une solution unique $y(t) = t^2 + 2$.

Viens ensuite le théorème de Cauchy-Lipschitz dont l'énoncé est le suivant : « Si la condition initiale est adaptée à la forme de l'équation différentielle, le théorème de Cauchy-Lipschitz dit que si la fonction $F : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 alors pour toute donnée de Cauchy $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe un intervalle $J \subset I$ contenant t_0 tel qu'il existe dans J une unique solution du problème de Cauchy associé ». Il assure l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy.

2.2 Méthode de résolution réelle

Soit u la vitesse de rotation de l'hélice (en mètres par secondes), on pose : $u' = f(u, t)$ et $u(0) = 0$, avec $f(u, t) = a(t) + \alpha u + \beta u^2$. Les coefficients du polynôme nous ont été fournis et sont les suivants :

- $a(t) = 0.055$ en m/s^2 correspondant à un vent constant de $25m.s^{-1}$
- $\alpha = -0.04$ en s^{-1}
- $\beta = -0.0032$ (sans unité)

Nous remarquons que $f(u, t)$ correspond à un polynôme du second degré ayant un discriminant positif. Nous résolvons ce polynôme et obtenons les deux racines suivantes : $u_1 = 1.25$ et $u_2 = -13.75$.

Dans la suite de notre étude, nous considérons la solution u_1 comme étant la seule possible vu que la vitesse de l'hélice est positive ou nulle. La fonction $f(u, t)$ peut donc être factorisée de la façon suivante :

$$u'(t) = \beta \times (u - u_1)(u - u_2)$$

En posant les changements de variables suivants : $v = u - u_1$ puis $w = \frac{1}{v}$ nous obtenons une nouvelle équation différentielle bien plus simple à résoudre :

$$w' + \beta(u_1 - u_2)w = -\beta$$

En trouvant la solution homogène puis la solution particulière, et à l'aide des conditions initiales, nous obtenons la solution de notre équation de départ :

$$u = \frac{-13.75 \times \exp(0.048t) + 13.75}{-11 \times \exp(0.048t) - 1} \quad (2.1)$$

Nous avons alors l'équation de la vitesse de l'éolienne en fonction du temps (pour un vent constant). L'ensemble de la résolution est donnée en annexe.

2.3 Méthodes d'Euler[3]

2.3.1 Explicite

La méthode d'Euler, de manière générale, est une méthode numérique qui consiste à résoudre des équations différentielles de la forme :

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \quad (2.2)$$

avec les conditions initiales : $y(0) = y_0$ Le principe de la méthode explicite est d'approximer les valeurs de la fonction y' sur un intervalle $[0; T]$ que l'on divise en n sous intervalles de longueur h tels que $h = \frac{T}{n+1}$. On obtient ainsi une suite récurrente $y(t_n)$ de premier terme $y(t_0) = y_0$ avec $t_{n+1} - t_n = h$. Pour approcher la valeur de y à l'instant $t_{(n+1)}$ on intègre la fonction $f(t, y(t))$ dans l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$. Ainsi, on obtient $y_{n+1} - y_n \approx h \times f(t_n; y(t_n))$ et donc :

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) \quad (2.3)$$

Une autre façon de voir le problème est d'approximer la dérivée de $y(t_n)$:

$$\frac{dy}{dt} = y'(t_n) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{t_{n+1} - t_n}$$

Comme $t_{n+1} - t_n = h$ on obtient $y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + h \times f(t_n, y(t_n))$.

2.3.2 Implicite

Remarquons que l'on peut aussi approximer la dérivée de y en t_{n+1} :

$$\frac{dy}{dt} = y'(t_{n+1}) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{t_{n+1} - t_n}$$

On obtient la nouvelle formule :

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + h \times f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

2.4 Méthode du Point milieu[2]

On part de : $u(t_{i+1}) = u(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, u(t))dt$ avec $h = t_{i+1} - t_i$. On cherche à approcher l'intégrale de $f(t, u(t))dt$. On utilise un point intermédiaire (le point milieu) entre U_n et $U(t_{n+1})$ qu'on note $U(t_{n+\frac{1}{2}})$ (avec $t_{n+1} = t_n + h$) :

$$U(t_{n+\frac{1}{2}}) = U_n + \frac{h}{2}(f(t_n, U(t_n)))$$

Donc $u_{n+1} = u_n + h \times f(t_n + \frac{h}{2}, u(t_{n+\frac{1}{2}}))$. Ensuite, on détermine $k_1 = f(t_i, u(t_i))$ et on en déduit $k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, u(t_i) + k_1 \times \frac{h}{2})$. Enfin, on calcule $u(t_{i+1}) = u(t_i) + h \times k_2$.

Au final, on obtient :

$$u(t_{i+1}) = u(t_i) + \frac{h}{2} \times f(t_i + \frac{h}{2}, u(t_{i+\frac{1}{2}}))$$

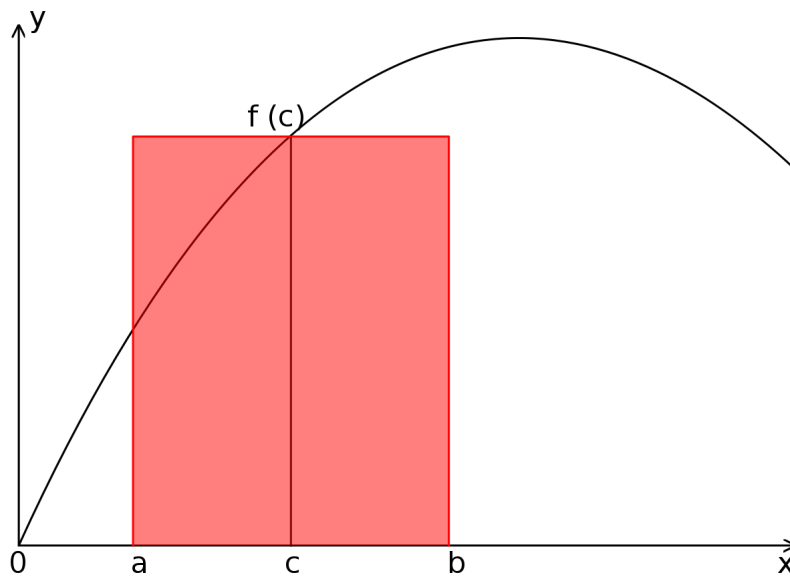


FIGURE 2.1 – Graphique représentant la méthode du point milieu[2]

L'image ci-contre permet de mieux visualiser cette méthode. On a un intervalle $[a; b]$ une fonction f avec l'intégrale (donc l'aire sous la courbe) de a à b à approximer. $c = \frac{a+b}{2}$ est le point milieu. $f(c) \times (b - a)$ donne l'aire rouge, c'est l'approximation de l'intégrale précédente. On remarque que plus l'intervalle $[a; b]$ est petit, plus l'approximation est précise.

Ainsi, pour approximer l'intégrale d'une fonction $f(t)$ sur un grand intervalle $[A; B]$, on divise cet intervalle en n intervalles de tailles égales. On obtient un pas $h = \frac{B-A}{n}$, puis on approxime l'intégrale sur chacun de ces intervalles, puis on fait la somme des intégrales approximées. On obtient donc une formule facile à coder avec une boucle déterministe :

$$u(t_{i+1}) = u(t_i) + h \times f(t_{i+\frac{1}{2}})$$

Rappelons que plus n est grand, plus l'approximation est précise. On peut d'ailleurs faire une analogie avec le théorème de la somme de Riemann dont l'énoncé est le suivant : soit f continue sur $[a; b]$. On pose $h_n = \frac{b-a}{n}$ et $x_k = a + kh_n$ avec k un naturel variant de 0 à n . On note que x_k est différent de notre point milieu, mais le théorème serait encore vrai si c'était le cas. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n \times \sum_{k=0}^n f(x_k)$$

Ce théorème signifie qu'avec un pas h_n infiniment petit, la somme de Riemann est égale à l'intégrale cherchée, et non pas une approximation. Cela rejoint notre idée que plus n est grand, plus l'approximation est précise.

Chapitre 3

Résultats et Analyse

Maintenant que nous avons les méthodes, il nous est possible de résoudre notre équation et ainsi de comparer les précisions de chaque méthode. Tout d'abord, nous commençons nos résolutions pour un vent constant afin de faciliter l'obtention de résultats et de valider nos « hypothèses », puis nous étudierons le cas d'une rafale de vent.

3.1 Etude des méthodes pour un vent constant

En résolvant notre équation avec les méthodes d'Euler, du point milieu et enfin avec la méthode réelle sans approximation. Nous avons réalisé, pour chaque méthode de résolution, un programme Pascal (disponible en annexe) nous permettant de calculer les valeurs de la vitesse de l'éolienne en fonction du temps. On obtient alors le graphe suivant grâce au logiciel GNUPLOT :

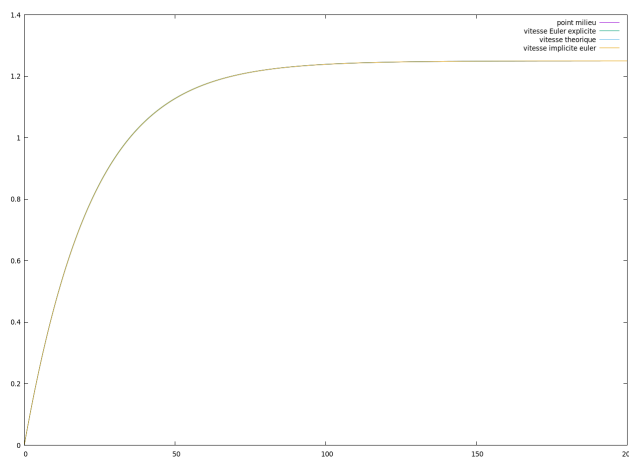


FIGURE 3.1 – Vitesse éolienne (tour/s) en fonction du temps (s) pour chaque méthode étudiée

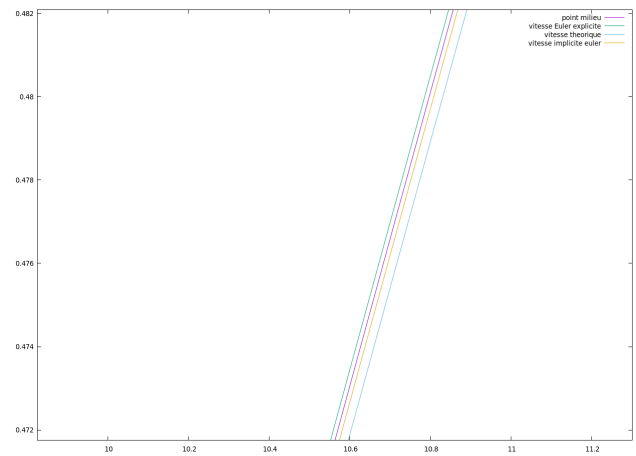


FIGURE 3.2 – ZOOM du graphe « Vitesse éolienne (tour/s) en fonction du temps (s) pour chaque méthode étudiée »

Nous pouvons alors faire des observations sur ce graphe. Tout d'abord, on peut voir sur la Figure 3.1 que de manière générale les 4 méthodes sont très proches et il est difficile de les repérer sur la Figure 3.1. En zoomant (Figure 3.2) on remarque alors que certaines méthodes approximent mieux les valeurs réelles de la vitesse de l'éolienne. En effet, la méthode du point milieu est celle qui est la plus proche de la réalité.

Commentons désormais l'allure générale de la vitesse de l'éolienne : notre résultat semble cohérent avec la réalité car on a bien une augmentation de la vitesse au départ, puis la pente de l'augmentation diminue au fur-et-à-mesure, pour finalement arriver à une stabilisation de la vitesse de l'éolienne. Comme dans la réalité la vitesse de l'éolienne n'augmente par indéfiniment.

On se propose maintenant de comparer les méthodes mais sur des pas de temps variant (temps entre chaque valeur de vitesse calculée) et calculer l'erreur commise par chaque méthode par rapport à la valeur réelle de la vitesse. Ainsi, nous pouvons mettre en avant le comportement de chaque méthode en fonction des pas de temps. On obtient alors le graphe suivant :

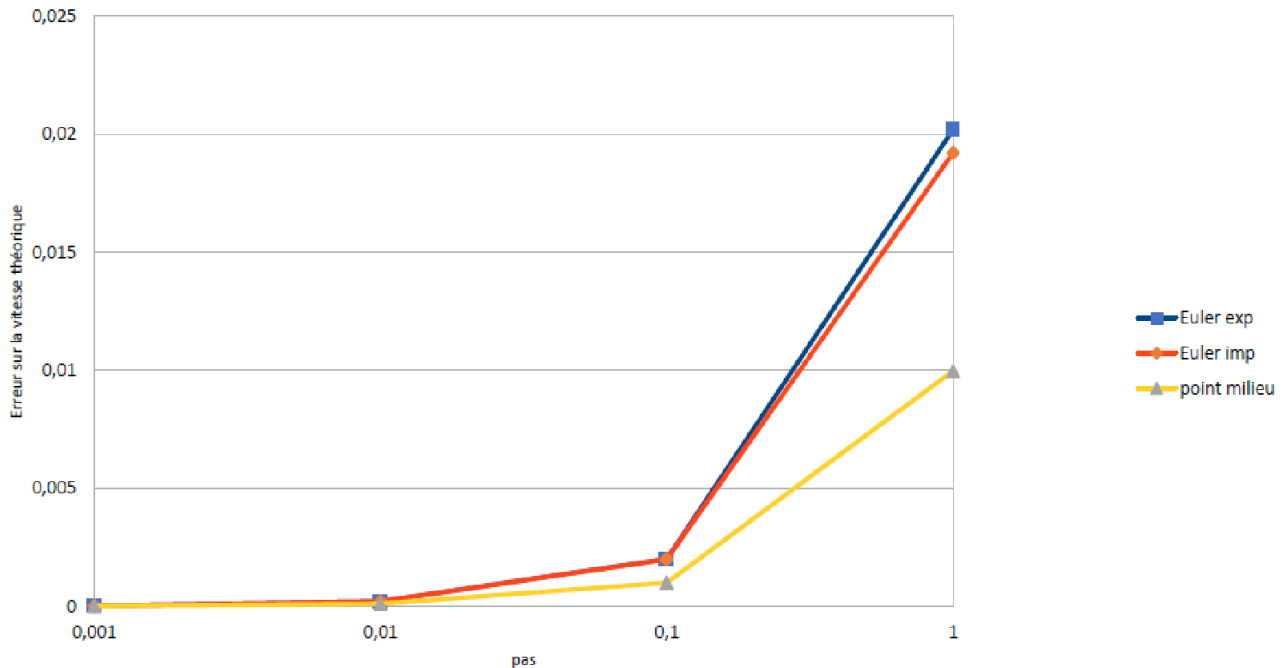


Figure 3.3 – Graphe des erreurs des méthodes en fonction du pas de temps

Tout d’abord, on remarque que plus le pas est grand, plus l’erreur est importante. Cela reste cohérent avec notre analogie avec le théorème de la somme de Riemann. Encore une fois, on remarque que le point milieu est la méthode la moins sensible à l’augmentation du pas et ainsi la plus proche de la valeur trouvée à l’aide de la méthode dite théorique. Nous avons au départ choisi un pas quelconque pour tracer le graphe de l’évolution de la vitesse de l’éolienne en fonction du temps, puis suite à l’obtention de ce nouveau graphe des erreurs, il nous a été possible d’adapter notre pas de telle sorte à minimiser les erreurs. Nous choisissons un pas de 0,01.

Il est évident que dans la réalité un vent constant est très rare voir impossible. Nous avons donc commencé à modéliser une rafale de vent afin de voir son influence sur la vitesse des pâles de l’éolienne. Cela nous a demandé de reprendre nos résolutions de l’équation du mouvement des pâles.

3.2 Etude des méthodes pour une rafale de vent

Dans cette partie, nous allons nous intéresser aux effets d’une rafale de vent sur la vitesse des hélices d’une éolienne.

Pour cela, nous nous plaçons dans le cadre où la vitesse du vent est d’abord constante et égale à $12m/s$ puis passe à $37m/s$ entre $t = 30s$ et $t = 60s$ avant de revenir à $12m/s$.

Pour étudier cette rafale de vent, nous choisissons la méthode du point milieu car plus précise et la méthode théorique. Nous nous rendons compte qu’il n’est pas possible de résoudre l’équation de la vitesse de l’éolienne car la fonction qui modélise la vitesse du vent n’est pas continue. Nous avons donc dû réaliser une nouvelle résolution pour la méthode théorique utilisant des valeurs trouvées grâce à la méthode du point milieu. C’est à ce moment là, que nous réalisons que la méthode du point milieu est nécessaire et plus facile, car elle ne demande aucun ajustement pour le cas d’une rafale de vent.

3.2.1 Résolution théorique

Nous disposons de l’équation suivante : $u'(t) = a(t) + \alpha u + \beta u^2$ avec $a(t)$, α , β , et les mêmes variables que précédemment. Cependant dans notre cas de figure d’une rafale entre $t = 30s$ et $t = 60s$, nous disposons déjà de deux solutions $u(30) = 8,92$ et $u(60) = 20.4$ (unité m/s), obtenue grâce à la méthode du point milieu.

Ayant des solutions particulières, nous pouvons résoudre cette équation comme étant une équation de Riccati. En effectuant une résolution manuelle, nous obtenons :

$$u(t) = u_2 + \frac{1}{C \exp(-(\alpha + 2\beta u_2)t) - \frac{\beta}{2\beta u_2 + \alpha}} \quad (3.1)$$

De plus, nous ne devons pas oublier que la valeur de u_2 (qui est la racine positive du polynôme initial) dépend de la vitesse du vent et donc ne sera pas la même.

Pour une vitesse de vent de $12m.s^{-1}$ nous avons $u_2 = 55m.s^{-1}$ et pour $37m/s$ nous obtenons $u_2 = 101,4m.s^{-1}$.

C est une constante qui nous reste à déterminer, cependant afin de conserver la continuité de la fonction nous déterminerons dans un premier cas C_1 en posant $u(0) = u(30) = 8,92$ puis dans un second cas C_2 avec $u(0) = u(60) = 20.4$.

Nous obtenons donc $C_1 = \left(\frac{1}{8,92 - u_2}\right) + \frac{\beta}{(2\beta u_1 + \alpha) \times \exp(-30(\alpha + 2\beta u_2))}$ et $C_2 = \left(\frac{1}{20.4 - u_2}\right) + \frac{\beta}{(2\beta u_1 + \alpha) \times \exp(-60(\alpha + 2\beta u_2))}$.

Au final, nous nous retrouvons avec deux équations de $u(t)$, celle associée à C_1 correspond à la vitesse de l'éolienne pour t compris entre 30s et 60s et celle associée à C_2 correspond à la vitesse pour t supérieur à 60s.

3.2.2 Graphiques

Tout d'abord, nous souhaitons souligner le fait que la résolution théorique serait totalement fautive si nous ne prenions pas en compte la discontinuité de la fonction qui modélise le vent qui rend la fonction qui modélise la vitesse de l'éolienne discontinue à son tour. Comme on peut le voir sur la Figure 3.4, le graphe obtenu est absurde, et physiquement il est impossible pour une éolienne que sa vitesse soit discontinue : pour un même temps, on ne peut pas avoir deux valeurs de vitesse. Après modifications de notre résolution on obtient le graphe 3.5 qui est plus cohérent.

Concernant l'allure de la courbe, nous pouvons séparer le graphe en trois parties distinctes (de 0 à 30 secondes, de 30 à 60 secondes et de 60 à la fin de la durée de l'étude). Dans un premier temps, on remarque que les deux premières parties possèdent des allures similaires. En effet, dans les deux cas, la vitesse de l'éolienne augmente progressivement, la vitesse du vent étant constante de 0 à 30s et de 30 à 60s comme dans notre premier cas d'étude. Dans la troisième partie, la vitesse du vent chute engendrant une diminution puis stabilisation de la vitesse de l'éolienne, ce qui est réaliste.

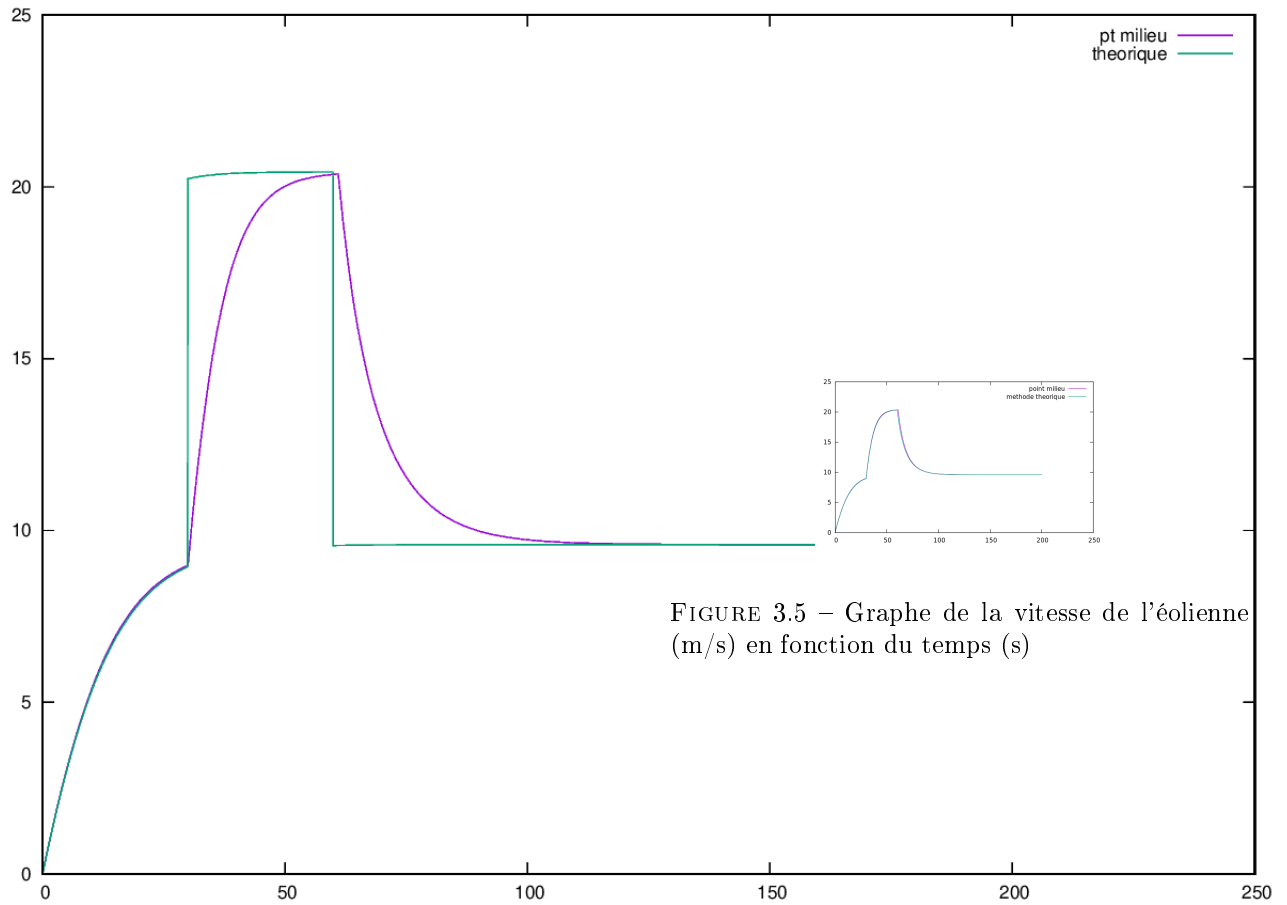


FIGURE 3.5 – Graphe de la vitesse de l'éolienne (m/s) en fonction du temps (s)

FIGURE 3.4 – Graphe de la vitesse de l'éolienne (m/s) en fonction du temps (s) avec une résolution théorique éronnée

Conclusion et perspectives

L'objectif de ce projet était de déterminer la vitesse de l'hélice d'une éolienne en fonction de la vitesse du vent. Pour ce faire, nous avons utilisé plusieurs méthodes de résolution numérique telles que les méthodes l'Euler (implicite et explicite) ou celle du point milieu. De plus, nous avons fait deux modélisations différentes, la première avec une vitesse de vent constante puis avec une rafale. Ces différentes études nous ont permis d'en conclure que la méthode d'approximation la plus efficace était la méthode du point milieu. En effet, cette dernière était systématiquement la plus proche de la vitesse réelle.

Ce projet nous a dans un premier temps permis de travailler en groupe et de créer une cohésion d'équipe qui a contribué à l'aboutissement de cette étude. Il nous a appris l'importance de la répartition des tâches et du travail d'équipe. De plus, lors de la réalisation de ce projet, nous avons appris à utiliser de nouveaux logiciels tels que LyX et Gnuplot, qui sont deux outils qui pourront nous être utiles à l'avenir. Enfin, ce travail nous a amené à nous familiariser aux méthodes d'approximation numérique tout en élargissant nos connaissances et notre efficacité informatiques.

Dans l'optique d'approfondir notre travail, certains points pourraient être approfondis. Par exemple, lors de la simulation d'une rafale nous avons augmenté puis diminué la vitesse du vent instantanément ce qui n'est pas représentatif de la vie réelle. Nous pourrions faire une Gaussienne qui permettrait une variation de la vitesse du vent plus progressive et proche de la réalité.

Bibliographie

- [1] Wikipédia : moment d'inertie. (document), 1
- [2] Wikipédia : méthode du point médian. (document), 2.4, 2.1, 3.2.2
- [3] Wikipédia : méthodes d'euler. (document), 2.3
- [4] BOYER Franck. *Agrégation Externe de Mathématiques Equations différentielles ordinaires*. PhD thesis, Aix-Marseille Université, 2017. (document), 2.1

Table des figures

1	Organigramme des tâches réalisées	4
2.1	Graphique représentant la méthode du point milieu[2]	9
3.1	Vitesse éolienne (tour/s) en fonction du temps (s) pour chaque méthode étudiée	10
3.2	ZOOM du graphe « Vitesse éolienne (tour/s) en fonction du temps (s) pour chaque méthode étudiée »	10
3.3	Graphe des erreurs des méthodes en fonction du pas de temps	11
3.4	Graphe de la vitesse de l'éolienne (m/s) en fonction du temps (s) avec une résolution théorique éronnée	13
3.5	Graphe de la vitesse de l'éolienne (m/s) en fonction du temps (s)	13
3.6	Programme de la rafale de vent	17
3.7	Programme de la rafale de vent (suite)	17
3.8	Programme de la méthode du point milieu	18
3.9	Programme de la rafale de vent avec la méthode du point milieu	18
3.10	Programme de la méthode d'Euler	19

Annexes

```

1  program rafale_methode_reel_porte;
2
3  var delta,u1,u2,vitesseEolienne,t,duree_etude,pas,V,C: Real;
4  const alpha = -0.084;
5  const beta = -0.0032;
6
7  function Vitesse_Vent(t:Real):Real;
8  begin
9      if (30=t) and (t<=60) then
10         Vitesse_Vent:= 37
11      else
12         Vitesse_Vent:= 12;
13      end;
14
15  begin
16      t:=0;
17      duree_etude:= 200;
18      pas:=0.1;
19      //writeln('temps', ' ',vitesseVent,' ',vitesseEolienne);
20      while t<=duree_etude do
21      begin
22          t:=t+pas;
23          V:=-0.03+0.059*Vitesse_Vent(t); // modif du prof
24          delta:= (alpha*alpha)-4*beta*V;
25          u1:= (-alpha-sqrt(delta))/(2*beta);
26          u2:= (-alpha+sqrt(delta))/(2*beta);
27          if t<=30 then
28              vitesseEolienne:= u1+1/((-1/u1+1/(u1-u2))*exp(-beta*(u1-u2)*t)-1/(u1-u2))
29          else
30              if ((t=30) and (t<=60)) then
31              begin
32                  C:= (1/(0.92-u1) + (beta/(2*beta*u1+alpha)))/exp(-alpha+2*beta*u1*30);
33                  vitesseEolienne:= u1+1/(C*exp(-alpha+2*beta*u1*t))-beta/(2*beta*u1+alpha);
34              end
35              else
36                  if t>=60 then
37                  begin
38                      C:= (1/(20.4-u1) + (beta/(2*beta*u1+alpha)))/exp(-alpha+2*beta*u1*60);
39                      vitesseEolienne:= u1+1/(C*exp(-alpha+2*beta*u1*t))-beta/(2*beta*u1+alpha);
40                  end;
41              writeln('t:10:3,' ' ',V:10:3,' ' ',vitesseEolienne:10:3);
42          end;
43      end;
44  end.

```

FIGURE 3.6 – Programme de la rafale de vent

```

5  const beta = -0.0032;
6
7  function Vitesse_Vent(t:Real):Real;
8  begin
9      if (30=t) and (t<=60) then
10         Vitesse_Vent:= 37
11      else
12         Vitesse_Vent:= 12;
13      end;
14
15  begin
16      t:=0;
17      duree_etude:= 200;
18      pas:=0.1;
19      //writeln('temps', ' ',vitesseVent,' ',vitesseEolienne);
20      while t<=duree_etude do
21      begin
22          t:=t+pas;
23          V:=-0.03+0.059*Vitesse_Vent(t); // modif du prof
24          delta:= (alpha*alpha)-4*beta*V;
25          u1:= (-alpha-sqrt(delta))/(2*beta);
26          u2:= (-alpha+sqrt(delta))/(2*beta);
27          if t<=30 then
28              vitesseEolienne:= u1+1/((-1/u1+1/(u1-u2))*exp(-beta*(u1-u2)*t)-1/(u1-u2))
29          else
30              if ((t=30) and (t<=60)) then
31              begin
32                  C:= (1/(0.92-u1) + (beta/(2*beta*u1+alpha)))/exp(-alpha+2*beta*u1*30);
33                  vitesseEolienne:= u1+1/(C*exp(-alpha+2*beta*u1*t))-beta/(2*beta*u1+alpha);
34              end
35              else
36                  if t>=60 then
37                  begin
38                      C:= (1/(20.4-u1) + (beta/(2*beta*u1+alpha)))/exp(-alpha+2*beta*u1*60);
39                      vitesseEolienne:= u1+1/(C*exp(-alpha+2*beta*u1*t))-beta/(2*beta*u1+alpha);
40                  end;
41              writeln('t:10:3,' ' ',V:10:3,' ' ',vitesseEolienne:10:3);
42          end;
43      end;
44  end.

```

FIGURE 3.7 – Programme de la rafale de vent (suite)

```

1 program pointMilieu;
2
3 Const
4 {
5   c0 = 1; // moment lié à l'axe de rotation (du couple)
6   c1 = 1; // "
7   c2 = 1; //moment de liaison sur l'axe de rotation
8   c3 = 1; //frottements visqueux
9   c4 = 1;
10 }
11 J = 1;
12 {
13   v_vent = 3;
14 }
15 pas = 0.1 //secondes;
16 Max = 100000;
17
18 Type Etude = record
19   temps : array[1..Max] of real;
20   vitApprochee : array[1..Max] of real;
21   vitTheorique : array[1..Max] of real;
22 end;
23
24 Var i, duree_etude : Smallint;
25     Etude : Etude; // en colonne 1 : le temps; en 2: vitesse Euler, en 3: vitesse Théorique(exacte) //v_eolienne (m/ms) temps pas et duree_etude (ms)
26     PointMil : Real; //PointMil joue le role de u(n+1/2)
27
28 Begin
29   Instant.vitApprochee[1] := 0;
30   Instant.temps[1] := 0;
31   Instant.vitTheorique[1] := (-13.75*exp (0.048*Instant.temps[1])+13.75)/(-11*exp (0.048*Instant.temps[1])-1);
32   duree_etude := 200;
33   i := 1;
34   //writeln(' temps ', i, ' vitesse eolienne | vitesse th exacte');
35   while (Instant.temps[i]<=duree_etude) do
36   begin
37     PointMil := Instant.vitApprochee[i] + (pas/2)*(0.055-0.04*Instant.vitApprochee[i] -0.0032*(Instant.vitApprochee[i]*Instant.vitApprochee[i]));
38     Instant.vitApprochee[i+1] := PointMil + (pas/2) * (0.055-0.04*PointMil -0.0032*(PointMil*PointMil));
39     Instant.temps[i+1] := Instant.temps[i] + pas;
40     Instant.vitTheorique[i+1] := (-13.75*exp (0.048*Instant.temps[i+1])+13.75)/(-11*exp (0.048*Instant.temps[i+1])-1);
41     //affichage des valeurs//

```

FIGURE 3.8 – Programme de la méthode du point milieu

```

12 vitApprochee : array[1..Max] of real;
13 vitTheorique : array[1..Max] of real;
14 Erreur : array[1..Max] of real;
15
16
17 Var i, duree_etude : Smallint;
18     Instant : Etude; // en colonne 1 : le temps; en 2: vitesse Euler, en 3: vitesse Théorique(exacte) //v_eolienne (m/ms) temps pas et duree_etude (ms)
19     PointMil, V : Real; //PointMil joue le role de u(n+1/2)
20
21 function Vitesse_Vent(t:Real):Real;
22 begin
23   if (30<=t) and (t<=60) then
24     Vitesse_Vent:= 37
25   else
26     Vitesse_Vent:= 12;
27 end;
28
29 Begin
30   Instant.vitApprochee[1] := 0;
31   Instant.temps[1] := 0;
32   //Instant.vitTheorique[1] := (-13.75*exp (0.048*Instant.temps[1])+13.75)/(-11*exp (0.048*Instant.temps[1])-1);
33   duree_etude := 200;
34   i := 1;
35   // Instant.Erreur[1] := ABS(Instant.vitTheorique[1]-Instant.vitApprochee[1]);
36   //writeln(' temps ', i, ' vitesse eolienne | vitesse th exacte');
37   while (Instant.temps[i]<=duree_etude) do
38   begin
39     V := -0.03+0.059*Vitesse_Vent(Instant.temps[i]);
40     PointMil := Instant.vitApprochee[i] + (pas/2)*(V-0.04*Instant.vitApprochee[i] -0.0032*(Instant.vitApprochee[i]*Instant.vitApprochee[i]));
41     Instant.vitApprochee[i+1] := PointMil + (pas/2) * (V-0.04*PointMil -0.0032*(PointMil*PointMil));
42     Instant.temps[i+1] := Instant.temps[i] + pas;
43     // Instant.vitTheorique[i+1] := (-13.75*exp (0.048*Instant.temps[i+1])+13.75)/(-11*exp (0.048*Instant.temps[i+1])-1);
44     // Instant.Erreur[i+1] := ABS(Instant.vitTheorique[i+1]-Instant.vitApprochee[i+1])/Instant.vitTheorique[i+1];
45     //affichage des valeurs//
46     writeln(Instant.temps[i]:20:2, ' ', Instant.vitApprochee[i]:20:7, ' ', Instant.vitTheorique[i]:20:7, ' ', Instant.Erreur[i]:20:7);
47     i := i+1;
48   end;
49
50 End.
51

```

FIGURE 3.9 – Programme de la rafale de vent avec la méthode du point milieu

```

1 program calculMethodes;
2
3 Const
4 {
5   c0 = 1; // moment lié à l'axe de rotation (du couple)
6   c1 = 1; // "
7   c2 = 1; //moment de liaison sur l'axe de rotation
8   c3 = 1; //frottements visqueux
9   c4 = 1;
10 }
11 J = 1;
12 {
13   v_vent = 3;
14 }
15 pas = 0.1 //secondes;
16 Max = 100000;
17
18 Type Tableau = array[1..4,1..Max] of real;
19
20 Var i, duree etude : Smallint;
21 ValeursTemps_Vitesse : Tableau; // en colonne 1 : le temps; en 2: vitesse Euler, en 3: vitesse Théorique(exacte) //v_eolienne (m/ms) temps pas et duree_etude (ms), en 4:
22 chaine : String;
23
24
25 Begin
26 ValeursTemps_Vitesse[2,1] := 0;
27 ValeursTemps_Vitesse[1,1] := 0;
28 ValeursTemps_Vitesse[3,1] := (-13.75*exp (0.048*ValeursTemps_Vitesse[1,1])+13.75)/(-11*exp (0.048*ValeursTemps_Vitesse[1,1])-1);
29 ValeursTemps_Vitesse[4,1] := 0;
30 duree_etude := 200;
31 i:=1;
32 //writeln(' temps ',i,',vitesse eolienne explicite | vitesse eo implicite | vitesse th exacte');
33 while (ValeursTemps_Vitesse[1,1]<=duree_etude) do
34 begin
35 ValeursTemps_Vitesse[2,i+1] := ValeursTemps_Vitesse[2,i] + (pas) * (0.055-0.04*ValeursTemps_Vitesse[2,i] -0.0032*(ValeursTemps_Vitesse[2,i]*ValeursTemps_Vitesse[2,
36 ValeursTemps_Vitesse[1,i+1] := ValeursTemps_Vitesse[1,i] + pas;
37 ValeursTemps_Vitesse[3,i+1]:= (-13.75*exp (0.048*ValeursTemps_Vitesse[1,i+1])+13.75)/(-11*exp (0.048*ValeursTemps_Vitesse[1,i+1])-1);
38 ValeursTemps_Vitesse[4,i+1]:= (0.04*pas+1-sqrt((-0.04*pas-1)*(-0.04*pas-1)-4*(-pas*0.0032)*(ValeursTemps_Vitesse[4,i]+0.055*pas)))/(-2*pas+0.0032);
39 //affiche des valeurs//
40 writeln(ValeursTemps_Vitesse[1,i]:20:2, ' ',ValeursTemps_Vitesse[2,i]:20:7, ' ',ValeursTemps_Vitesse[4,i]:20:7, ' ',ValeursTemps_Vitesse[3,i]:20:7)
41 i:=i+1;
42 end;

```

FIGURE 3.10 – Programme de la méthode d’Euler

Résolution théorique dans le cas d'une rafale (porte)

June 11, 2019

Dans cette partie, nous allons nous intéresser aux effets d'une rafale de vent sur la vitesse des hélices d'une éolienne. Pour cela, nous nous plaçons dans le cadre où la vitesse du vent est d'abord constante et égale à $12m/s$ puis passe à $37m/s$ entre $t = 30s$ et $t = 60s$ avant de revenir à $12m/s$.

Nous disposons de l'équation suivante : $u'(t) = a(t) + \alpha u + \beta u$ avec $a(t)$, α et β les mêmes variables que précédemment. Cependant dans notre cas de figure d'une rafale entre $t = 30s$ et $t = 60s$, nous disposons déjà de deux solutions $u(30) = 8,92$ et $u(60) = 9,56$ (en m/s), obtenue grâce à notre résolution théorique précédente. Ayant des solutions particulières, nous pouvons résoudre cette équation comme étant une équation de Riccati.

En effectuant une résolution manuelle, nous obtenons :

$$u(t) = u_2 + \frac{1}{C e^{-(\alpha+2\beta u_2)t} - \frac{\beta}{2\beta u_2 + \alpha}}$$

avec C une constante qui nous reste à déterminer. Cependant, afin de conserver la continuité de la fonction nous déterminerons dans un premier cas C_1 en posant $u(0) = u(30) = 8,92$, puis dans un second cas C_2 avec $u(0) = u(60) = 9,56$. De plus, nous ne devons pas oublier que la valeur de u_2 (qui est la racine positive du polynôme initial) dépend de la vitesse du vent et donc ne sera pas la même. Pour une vitesse de vent de $12m/s$ nous avons $u_2 = 55m/s$ et pour $37m/s$ nous obtenons $u_2 = 101,4m/s$.

Nous obtenons donc C_1 et C_2 . Au final, nous nous retrouvons avec deux équations de $u(t)$.

Résolution théorique

Soit u la vitesse de rotation de l'hélice (en mètres par secondes), on pose :

$$\begin{aligned} u' &= f(u, t) \text{ (en m/s}^2\text{)} \\ u(0) &= 0 \\ \text{avec } f(u, t) &= a(t) + \alpha u + \beta u^2 \end{aligned}$$

$a(t) = 0,055$ (en m/s^2) correspond à la vitesse du vent (que nous prenons constante dans un premier temps à $25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$)

$$\alpha = -0,04 \text{ (en } s^{-1}\text{)}$$

$$\beta = -0,0032 \text{ (sans unité)}$$

Nous remarquons que $f(u, t)$ correspond à un polynôme du second degré ayant un discriminant positif :

$$\Delta = \alpha^2 - 4 \times \beta \times a(t) > 0$$

Ces deux solutions particulières sont de la forme :

$$u_1 = \frac{-\alpha - \sqrt{\Delta}}{2\beta} = 1,25 \quad u_2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\Delta}}{2\beta} = -13,75$$

Dans la suite de notre étude, nous considérons la solution u_1 comme étant la seule possible vu que la vitesse de l'hélice est positive ou nulle.

La fonction $f(u, t)$ peut donc être factorisée de la façon suivante :

$$u'(t) = \beta \times (u - u_1)(u - u_2)$$

Posons $v = u - u_1$ ainsi $u = v + u_1$, on obtient donc :

$$\begin{aligned} u'(t) &= \beta \times v(u - u_2) \\ v' + u_1' &= \beta \times v(v + u_1 - u_2) \end{aligned}$$

Or u_1 est une constante donc $u_1' = 0$:

$$\begin{aligned} v' &= \beta v^2 + \beta v(u_1 - u_2) \\ \frac{v'}{v^2} - \frac{\beta}{v} \times (u_1 - u_2) &= \beta \end{aligned}$$

Posons une nouvelle variable $w = \frac{1}{v}$ et donc $w' = -\frac{v'}{v^2}$, nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} -w' - \beta(u_1 - u_2)w &= \beta \\ w' + \beta(u_1 - u_2)w &= -\beta \end{aligned}$$

Exprimons tout d'abord la solution homogène wh de cette équation différentielle du premier ordre :

$$\begin{aligned}
 w_h' \times e^{\beta(u_1-u_2)y} + w_h \times \beta(u_1-u_2)e^{\beta(u_1-u_2)t} &= 0 \\
 (w_h' \times e^{\beta(u_1-u_2)y}) &= 0 \\
 w_h \times e^{\beta(u_1-u_2)y} &= m \quad (\text{avec } m \text{ une constante}) \\
 w_h &= m \times e^{-\beta(u_1-u_2)y}
 \end{aligned}$$

Intéressons nous maintenant à la solution particulière :

$$w_p = -\frac{1}{u_1-u_2}$$

La solution totale est donc : $w = w_h + w_p$

À $t = 0$ nous avons $u(0) = 0$, $v(0) = -u_1$ et $w(0) = -\frac{1}{u_1}$, nous en déduisons la constante m :

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{u_1} &= m - \frac{1}{u_1-u_2} \\
 m &= -\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1-u_2}
 \end{aligned}$$

Nous avons $w = \frac{1}{v}$, $v = u - u_1$ donc $w = \frac{1}{u-u_1}$, retrouvons donc la valeur de u :

$$\begin{aligned}
 w &= m e^{-\beta(u_1-u_2)t} - \frac{1}{u_1-u_2} \\
 \frac{1}{u-u_1} &= m e^{-\beta(u_1-u_2)t} - \frac{1}{u_1-u_2} \\
 u &= u_1 + \frac{1}{\left(-\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1-u_2}\right) e^{-\beta(u_1-u_2)t} - \frac{1}{u_1-u_2}} \\
 u &= 1,25 + \frac{1}{-\frac{11}{15} \times e^{\frac{6}{125}t} - \frac{1}{15}}
 \end{aligned}$$

Ce résultat semble cohérent car lorsque $t = 0$ nous obtenons bien $u(0) = 0$

En arrangeant l'expression de u sous forme de fraction, nous obtenons:

$$u = \frac{-13,75 \times e^{0,048t} + 13,75}{-11 \times e^{0,048t} - 1}$$