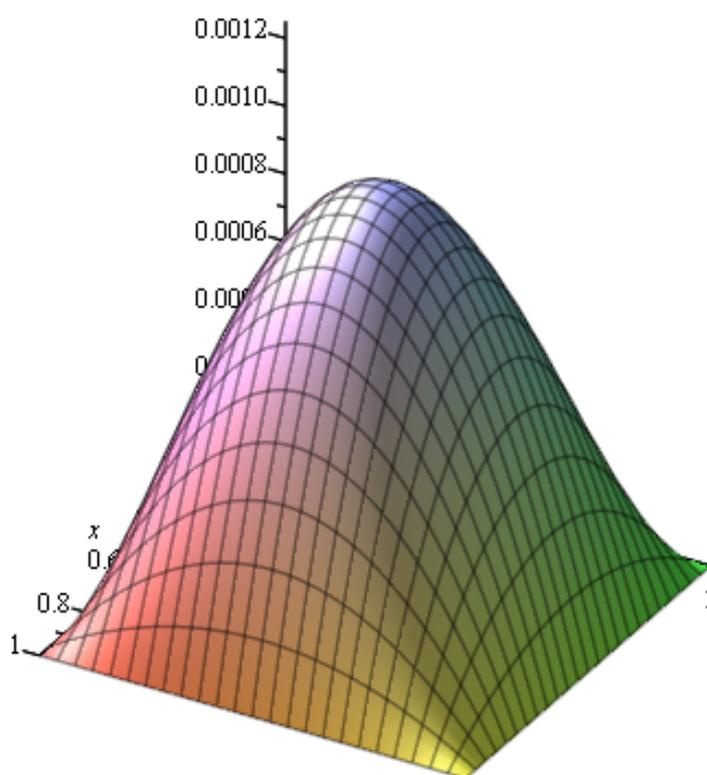


## Déformation d'une plaque



### Étudiants :

GUILLAUME BOURGEOIS  
BRENDAN DARVES-BORNOZ  
MANON HARDY  
MATTHIEU LE GUILLOIS  
PIERRE MARTINO  
LANDRY MASSON  
YINGLUN ZHANG

### Enseignant-responsable du projet :

BERNARD GLEYSE

**Date de remise du rapport :** 16/06/2019

**Référence du projet :** STPI/P6/2019-008

**Intitulé du projet :** Déformation d'une plaque

**Type de projet :** Modélisation

**Objectifs du projet :**

- Etudier les déformations d'une plaque dans le cas d'une flexion simple à l'équilibre
- Etudier l'évolution de la déformation au cours du temps

**Mots-clés du projet :** plaques, bilaplacien

# Table des matières

<b>Notations et Acronymes</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>Organisation du travail</b>	<b>5</b>
<b>1 Définitions</b>	<b>6</b>
1.1 Définition d'une plaque . . . . .	6
1.2 Théorie des plaques minces . . . . .	6
1.3 Déplacement . . . . .	6
1.4 Flexion simple . . . . .	7
1.5 Opérateur bilaplacien . . . . .	7
<b>2 Travail réalisé et résultats</b>	<b>8</b>
2.1 Équations d'équilibre dans le cas d'une flexion simple . . . . .	8
2.1.1 Conditions aux limites . . . . .	8
2.1.2 Solution . . . . .	8
2.2 Equation d'évolution en fonction du temps . . . . .	11
2.2.1 Conditions aux limites . . . . .	11
2.2.2 Résolution . . . . .	11
<b>3 Modélisation</b>	<b>14</b>
3.1 Avec l'équation d'équilibre dans le cas d'une flexion simple . . . . .	14
3.2 Avec l'équation d'évolution en fonction du temps . . . . .	15
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>16</b>
<b>Annexes</b>	<b>18</b>

# Notations et Acronymes

- $W(x, y, t)$  : le déplacement transversal
- $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  : la rigidité de flexion
- $h$  : l'épaisseur de la plaque
- $\rho$  : la masse volumique
- $E$  : le module de Young
- $\nu$  : le coefficient de Poisson
- $\nabla^4$  : le double laplacien
- $P$  : charge latérale

# Introduction

Dans le cadre de notre EC de P6, nous avons réalisé un projet de groupe qui concernait l'étude de la déformation de plaque et notamment sur le phénomène de flexion simple sur une plaque. Au travers de ce projet, nous avons pu travailler sur deux aspects de cette déformation. Dans un premier lieu nous avons étudié l'équation d'évolution en fonction du temps d'un point de vue mathématique mais aussi avec une simulation. Ensuite nous avons travaillé sur l'équation de flexion simple d'une plaque en s'intéressant notamment aux différentes conditions de bords. Ce projet nous a permis de nous faire nettement progresser dans de nombreux domaines tels que l'utilisation de logiciels comme Maple ou encore les mathématiques appliquées et bien sur dans le domaine de la mécanique. Celui ci nous a aussi permis de travailler notre gestion de projet et la rédaction de document en LaTeX.

# Organisation du travail

Premièrement, nous avons tous effectué des recherches bibliographiques pour mieux comprendre le sujet et déterminer une problématique. Le sujet est vaste et complexe, avant de se lancer, il était essentiel de bien comprendre les notions et d'assimiler les bases. Pour optimiser l'avancement du projet, nous avons décidé de diviser les recherches en deux axes : la résolution d'équation d'évolution en fonction du temps et celle d'équilibre de la flexion simple, en fonction des différentes conditions de bords. Guillaume, Pierre et Brendan ont travaillé sur l'équation d'évolution en fonction du temps. Tandis que Landry et Matthieu ont mené leurs recherches sur la résolution d'équation dans le cas de la flexion simple. Manon, pour causes personnelles, n'a pu assister aux séances que tard dans le semestre, et a donc codé intégralement sur LaTeX la résolution de l'équation dans le cas de la flexion simple. Yinglun, quant à lui, a eu du mal à s'intégrer. Ne suivant pas l'avancée du groupe sur le plan scientifique, nous lui avons demandé de coder l'autre axe principal sur LaTeX, épaulé par Manon. Mais le code ne compilait pas et trop de fautes persistaient. Guillaume, Pierre et Brendan ont donc codé leur partie, puis Manon a assemblé le tout. Ce travail n'a été possible que de part la collaboration et la bonne entente entre la plupart des membres. Nous remercions Monsieur GLEYSE pour nous avoir aiguillé, aidé et pour nous avoir permis de mener à bien ce projet.

# Chapitre 1

## Définitions

### 1.1 Définition d'une plaque

Une plaque est un solide délimité par deux plans parallèles (les faces), et un cylindre au sens large (de section quelconque et pas nécessairement circulaire) dont l'axe est perpendiculaire aux faces.

On définit :

- Le plan médian : plan situé à équidistance entre les faces
- Le feuillet neutre : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen
- Une fibre normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian. On se place dans le cas d'un matériau continu, élastique, homogène et isotrope. Pour l'étude de la flexion, on considère que les charges sont perpendiculaires aux faces

### 1.2 Théorie des plaques minces

La théorie des plaques permet de calculer les contraintes et les déformations dans une plaque soumise à des efforts. Elle s'inspire de la théorie des poutres.

La théorie des plaques minces, ou théorie de Love-Kirchhoff, suppose que

- Le plan moyen est initialement plan
- Le feuillet moyen ne subit pas de déformation dans son plan ; on ne considère que le déplacement transversal  $w$  des points du feuillet moyen
- Modèle de Kirchhoff : les sections normales au feuillet moyen restent normales lors de la déformation. En conséquence, on peut négliger le cisaillement
- L'épaisseur est faible ; en conséquence, les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles
- On reste en petites déformations

### 1.3 Déplacement

Soit un point  $M(x, y, z)$  de la plaque au repos. À l'instant  $t$ , sa position est  $M'$ , et l'on définit le vecteur déplacement :  $MM'$  ( $u, v, w$ ). Pour une plaque à un instant donné, les déplacements sur les axes  $u, v$  et  $w$  sont fonction du point  $M$ , donc de ses coordonnées  $(x, y, z)$ , et de l'instant  $t$ . Par hypothèse, les déplacements verticaux sont les mêmes pour tous les points d'une même fibre normale, on a donc :  $W(x, y, z, t) \Rightarrow W(x, y, t)$ .

## 1.4 Flexion simple

Dans notre projet, nous avons étudié la théorie des plaques qui se caractérise par une flexion simple. En mécanique, la flexion simple est la déformation d'un objet sous l'action d'une charge. Elle se traduit par une courbure. Dans le cas d'une plaque, elle tend à rapprocher deux points diamétralement opposés sous l'action de la force. Lors d'une flexion simple, il n'y a pas de variation de la ligne moyenne.

Une plaque est sollicitée en flexion simple autour de  $(G, \vec{z})$  si le torseur de cohésion s'écrit sous la forme:

$$\{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$$

## 1.5 Opérateur bilaplacien

L'opérateur bilaplacien est primordial dans notre projet car nous en avons besoin pour calculer la déformée d'une plaque dans le cas d'un flexion simple. En soit, l'opérateur bilaplacien est le résultat de l'opérateur linéaire le laplacien qui est appliqué deux fois. La formule de l'opérateur bilaplacien est la suivante :

$$\Delta^2 u = \nabla^4 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$$

## Chapitre 2

# Travail réalisé et résultats

### 2.1 Équations d'équilibre dans le cas d'une flexion simple

#### 2.1.1 Conditions aux limites

Pour une plaque rectangulaire en appui simple sur les bords :

$$\Delta^2 w = P$$

On a  $W = 0$  pour  $x = 0$ ;  $x = L_x$  et pour  $y = 0$  et  $y = L_y$

et donc  $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$  pour  $x = 0$  et  $x = L_x$

et  $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$  pour  $y = 0$  et  $y = L_y$

#### 2.1.2 Solution

D'après la méthode de Fourier :

On pose  $W = \sum_{m,n} a_{mn} W_{mn}$  avec  $W_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$

Ainsi,

$$\frac{\partial W_{mn}}{\partial x} = \frac{m\pi}{L_x} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x^2} = -\frac{m^2 \pi^2}{L_x^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

$$\frac{\partial^3 W_{mn}}{\partial x^3} = -\frac{m^3 \pi^3}{L_x^3} \cos\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

$$\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial x^4} = \frac{m\pi^4}{L_x^4} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

De même,

$$\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial y^4} = \frac{n\pi^4}{L_y^4} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

Ensuite,

$$\frac{\partial^3 W_{mn}}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{m^2 n \pi^3}{L_x^2 L_y} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

$$\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{m^2 n^2 \pi^4}{L_x^2 L_y^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

$$\nabla^4 W = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}$$

$$\nabla^4 W = \nabla^4 \sum_{m,n} a_{mn} W_{mn}$$

Le Laplacien est un opérateur linéaire, on a donc :

$$\nabla^4 W = \sum_{m,n} a_{mn} \nabla^4 W_{mn}$$

$$\nabla^4 W_{mn} = \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial^4 x} + 2 \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial^4 y}$$

A l'aide des calculs précédents on obtient :

$$\nabla^4 W_{mn} = \frac{m\pi^4}{L_x^4} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) + 2 \frac{m^2 n^2 \pi^4}{L_x^2 L_y^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) + \frac{n\pi^4}{L_y^4} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

$$\nabla^4 W_{mn} = \left(\frac{m\pi^4}{L_x^4} + 2 \frac{m^2 n^2 \pi^4}{L_x^2 L_y^2} + \frac{n\pi^4}{L_y^4}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

$$\nabla^4 W_{mn} = \pi^4 \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

Donc

$$\nabla^4 W_{mn} = \lambda w_{mn}$$

Ainsi,

$$\nabla^4 W = \sum_{m,n} a_{mn} \lambda W_{mn}$$

$$\nabla^4 W = \sum_{m,n} b_{mn} W_{mn}$$

et

$$\nabla^4 W = \frac{p}{D}$$

Or d'après Navier :

$$p = \sum_{m,n} p_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

$$\sum_{m,n} b_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) = \sum_{m,n} \frac{p_{mn}}{D} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

Par identification, on trouve  $b_{mn} = \frac{p_{mn}}{D}$ .

$$a_{mn} \lambda = b_{mn} \Leftrightarrow a_{mn} = \frac{b_{mn}}{\lambda} \Leftrightarrow a_{mn} = \frac{p_{mn}}{\lambda D}$$

Donc

$$W = \sum_{m,n} a_{mn} W_{mn} = \sum_{m,n} \frac{p_{mn}}{D \pi^4 \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

$$p(x, y) = \sum_{m,n} p_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \quad (1)$$

On multiplie (1) par  $\sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$  :

$$\sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) p(x, y) = \sum_{m,n} p_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

On intègre entre 0 et  $L_y$  :

$$\int_0^{L_y} \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) p(x, y) dy = \sum_m p_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \int_0^{L_y} \sin^2\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dy$$

$$\int_0^{L_y} \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) p(x, y) dy = \sum_m p_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \frac{L_y}{2} \quad (2)$$

On multiplie (2) par  $\sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right)$  :

$$\int_0^{L_y} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) p(x, y) dy = \sum_m p_{mn} \sin^2\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \frac{L_y}{2}$$

On intègre entre 0 et  $L_x$  :

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) p(x, y) dy dx = p_{mn} \frac{L_x L_y}{4}$$

Donc

$$p_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \left( \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) p(x, y) dy dx \right)$$

Finalement,

$$W(x, y) = \sum_{m, n \geq 1} \frac{p_{mn}}{D\pi^4 \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2} W_{mn}(x, y)$$

### 2.1.2.1 Pour un chargement sinusoïdal

$$p(x, y) = p_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

$$W(x, y) = \frac{p_0}{D\pi^4 \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)$$

### 2.1.2.2 Pour un chargement uniforme

Les détails sont en Annexe 1.

$$p(x, y) = p_0$$

$$p_{mn} = \frac{4\rho_0}{L_x L_y} \left( \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) p(x, y) dy dx \right)$$

Pour  $m, n = 1, 3, 5 \dots$  :

$$p_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn}$$

$$W(x, y) = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m, n} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right)}{mn \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2}$$

## 2.2 Equation d'évolution en fonction du temps

### 2.2.1 Conditions aux limites

Notre équation d'évolution est la suivante :

$$D\nabla^4 W(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial t^2} = 0$$

Pour résoudre cette équation, nous avons besoin de déterminer les conditions aux limites. Nous prendrons ici le cas d'une plaque rectangulaire simplement supportée.

On a donc  $W(x, y, t) = 0$  pour  $x = 0$ ;  $x = L_x$  et pour  $y = 0$  et  $y = L_y$

et donc  $\frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial x^2} = 0$  pour  $x = 0$  et  $x = L_x$

et  $\frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial y^2} = 0$  pour  $y = 0$  et  $y = L_y$

### 2.2.2 Résolution

Pour résoudre cette équation d'évolution, il est nécessaire de séparer les variables, de sorte à obtenir une solution de la forme :

$$W(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$$

En introduisant cette solution dans l'équation différentielle des plaques, on obtient :

$$\frac{X^{(4)}}{X} + 2\frac{X''}{X}\frac{Y''}{Y} + \frac{Y^{(4)}}{Y} = \frac{-1}{\mu}\frac{\ddot{T}}{T} = \beta^4 = \text{constante}$$

Avec  $\mu^2 = \frac{D}{\rho h}$ . Le détail de ce calcul se situe en Annexe 2.

A ce stade, déterminer  $X(x)$  et  $Y(y)$  séparément est trop complexe. Nous allons donc dans un premier temps fixer  $X(x)$  pour ensuite déterminer  $Y(y)$ . Prenons maintenant le cas d'une plaque simplement supportée uniquement sur 2 bords opposés. Grâce aux conditions limites, pour  $x = 0$  et  $x = L_x$ , on obtient une fonction de la forme :

$$X(x) = \sin\left(\frac{m\Pi x}{L_x}\right), \forall n \in N^*$$

On calcule maintenant  $X''(x)$  et  $X^{(4)}(x)$  :

$$X''(x) = -\left(\frac{m\Pi}{L_x}\right)^2 \sin\left(\frac{m\Pi x}{L_x}\right)$$

$$X^{(4)}(x) = \left(\frac{m\Pi}{L_x}\right)^4 \sin\left(\frac{m\Pi x}{L_x}\right)$$

En injectant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\left(\frac{m\Pi}{L_x}\right)^4 - 2\left(\frac{m\Pi}{L_x}\right)^2 \frac{Y''}{Y} + \frac{Y^{(4)}}{Y} = \beta^4$$

On pose  $G = \left(\frac{m\Pi}{L_x}\right)$  et on obtient une équation différentielle d'ordre 4 :

$$Y^{(4)} - 2G^2 Y'' + G^4 Y = Y \beta^4$$

$$\Leftrightarrow Y^{(4)} - 2G^2 Y'' + (G^4 - \beta^4) Y = 0$$

On pose l'équation caractéristique et on détermine les racines du polynôme :

$$p^4 - 2G^2 p^2 + (G^4 - \beta^4) = 0$$

On pose  $P = p^2$  et donc on obtient :

$$P^2 - 2G^2 P + (G^4 - \beta^4) = 0$$

On détermine le discriminant :  $\Delta = 4\beta^4$  et donc les racines du polynôme sont :

$$\gamma_1 = \sqrt{P_1} = \sqrt{\frac{2G^2 + \sqrt{4\beta^4}}{2}} = \sqrt{G^2 + \beta^2}$$

$$\gamma_2^* = \sqrt{P_2} = \sqrt{\frac{2G^2 - \sqrt{4\beta^4}}{2}} = \sqrt{G^2 - \beta^2}$$

Donc nos solutions sont  $S_1 = \gamma_1$  et  $S_2 = -\gamma_1$ . Mais  $G^2 - \beta^2 < 0$  donc impossible dans  $R$ , on prendra donc  $S_3 = i\gamma_2$  et  $S_4 = -i\gamma_2$  avec

$$\gamma_2 = \sqrt{\beta^2 - G^2}$$

Donc la solution de  $Y(y)$  est :

$$Y(y) = D_1 e^{\gamma_1 y} + D_2 e^{-\gamma_1 y} + D_3 e^{i\gamma_2 y} + D_4 e^{-i\gamma_2 y}$$

Cette solution peut s'écrire sous une autre forme plus simple à utiliser, et à dériver. Le détail de cette simplification se situe en Annexe 3.

$$Y(y) = C_1 \sin(\gamma_2 y) + C_2 \cos(\gamma_2 y) + C_3 \sinh(\gamma_1 y) + C_4 \cosh(\gamma_1 y)$$

Avec  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  et  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

Pour déterminer notre solution, nous devons passer par l'équation matricielle. Pour cela, nous avons besoin de nos conditions aux limites. Reprenons maintenant notre premier cas, celui d'une poutre simplement supportée sur tous ses bords, on obtient :

— 1<sup>ère</sup> condition aux limites :  $y = 0$ ; on obtient donc notre première équation :

$$C_2 + C_4 = 0$$

— 2<sup>ème</sup> condition aux limites :  $y = L_y$ ; on obtient :

$$C_1 \sin(\gamma_2 L_y) + C_2 \cos(\gamma_2 L_y) + C_3 \sinh(\gamma_1 L_y) + C_4 \cosh(\gamma_1 L_y) = 0$$

Pour déterminer les deux autres équations, on calcule la dérivée seconde de  $Y(y)$  :

$$Y''(y) = -C_1 \gamma_2^2 \sin(\gamma_2 y) - C_2 \gamma_2^2 \cos(\gamma_2 y) + C_3 \gamma_1^2 \sinh(\gamma_1 y) + C_4 \gamma_1^2 \cosh(\gamma_1 y)$$

Avec  $(\cosh(x))'' = \cosh(x)$  et  $(\sinh(x))'' = \sinh(x)$ .

On peut maintenant déterminer les 2 autres équations :

— 1<sup>ère</sup> condition aux limites :  $y = 0$ ; on obtient donc notre troisième équation :

$$-C_2 \gamma_2^2 + C_4 \gamma_1^2 = 0$$

— 2<sup>ème</sup> condition aux limites :  $y = L_y$ ; on obtient donc notre dernière équation :

$$-C_1 \gamma_2^2 \sin(\gamma_2 L_y) - C_2 \gamma_2^2 \cos(\gamma_2 L_y) + C_3 \gamma_1^2 \sinh(\gamma_1 L_y) + C_4 \gamma_1^2 \cosh(\gamma_1 L_y) = 0$$

Toutes ces équations conduisent à l'équation matricielle suivante :

$$A.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin(\gamma_2 L_y) & \cos(\gamma_2 L_y) & \sinh(\gamma_1 L_y) & \cosh(\gamma_1 L_y) \\ 0 & -\delta_2^2 & 0 & \delta_1^2 \\ -\gamma_2^2 \sin(\gamma_2 L_y) & -\gamma_2^2 \cos(\gamma_2 L_y) & \gamma_1^2 \sinh(\gamma_1 L_y) & \gamma_1^2 \cosh(\gamma_1 L_y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = 0$$

On détermine maintenant le déterminant de A, le calcul de celui-ci est détaillé en Annexe 4 :

$$\det(A) = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^2 \sinh(\gamma_1 L_y) \sin(\gamma_2 L_y)$$

On détermine une solution en calculant  $\det(A) = 0$  :

$$\begin{aligned} \det(A) = 0 &\Leftrightarrow (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^2 \sinh(\gamma_1 L_y) \sin(\gamma_2 L_y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin(\gamma_2 L_y) = 0 \text{ car } \gamma_1 \neq \gamma_2 \neq 0 \text{ et } L_y \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \gamma_2 L_y = n\pi, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

On cherche maintenant à déterminer la constante  $\beta$ . On sait que :

$$\gamma_2^2 = \beta^2 - G^2 \Leftrightarrow \beta^2 = \gamma_2^2 + G^2 \Leftrightarrow \beta^2 = \left(\frac{n\Pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{m\Pi}{L_x}\right)^2$$

Le but est désormais de déterminer les valeurs des 4 variables  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$ . Grâce aux conditions aux limites, on obtient :

$$C_2 + C_4 = 0 \Leftrightarrow C_2 = -C_4 - \gamma_1^2 C_2 + \gamma_2^2 C_4 = 0 \Leftrightarrow C_4(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) = 0$$

Or  $\gamma_1 \neq \gamma_2$  donc  $C_2 = C_4 = 0$

$$C_1 \sin(\gamma_2 L_y) + C_3 \sinh(\gamma_1 L_y) = 0 \Leftrightarrow C_3 = -C_1 \frac{\sin(\gamma_2 L_y)}{\sinh(\gamma_1 L_y)} \text{ Or } \sin(\gamma_2 L_y) = 0 \text{ car } \gamma_2 L_y = n\Pi \text{ donc } C_3 = 0$$

On en déduit que seul  $C_1 \neq 0$ , et donc :

$$Y_{mn}(y) = C_1 \sin(\gamma_2 y) = C_1 \sin\left(\frac{n\Pi}{L_y} y\right)$$

Or

$$\beta^4 = \frac{-1 \ddot{T}}{\mu^2 T} = \frac{\omega^2}{\mu^2} \Leftrightarrow \beta^2 = \frac{\omega}{\mu} \Leftrightarrow \omega = \beta^2 \mu$$

Ainsi, en remplaçant, on obtient l'expression des pulsations naturelles :

$$\omega_{mn} = \beta^2 \mu \Leftrightarrow \omega_{mn} = \left(\frac{n\Pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{m\Pi}{L_x}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

On peut alors déterminer une solution de  $T_{mn}(t)$ . Le détail de ce calcul se situe en Annexe 5, on obtient alors :

$$T_{mn}(t) = A_{mn} \cos(\omega_{mn} t) + B_{mn} \sin(\omega_{mn} t)$$

Ces solutions nous permettent de déterminer l'équation complète du déplacement d'une plaque simplement supportée :

$$W_{mn}(x, y, t) = X_{mn}(x) Y_{mn}(y) T_{mn}(t)$$

$$W_{mn}(x, y, t) = \sin\left(\frac{m\Pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n\Pi}{L_y} y\right) [A_{mn} \cos(\omega_{mn} t) + B_{mn} \sin(\omega_{mn} t)]$$

On a donc :

$$W(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn}(x, y) [A_{mn} \cos(\omega_{mn} t) + B_{mn} \sin(\omega_{mn} t)]$$

$$\text{avec la déformée modale } \varphi_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{m\Pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n\Pi}{L_y} y\right)$$

Pour débiter les simulations, il est nécessaire de déterminer les constantes  $A_{mn}$  et  $B_{mn}$ . A  $t = 0$ , on a  $W(x, y, 0) = A_{mn} \varphi_{mn}(x, y) = w_0(x, y)$  et  $\frac{dW(x, y, 0)}{dt} = \omega_{mn} B_{mn} \varphi_{mn}(x, y) = 0$  (cas de la vitesse nulle). Dans ce cas particulier,  $B_{mn} = 0$ .

Grâce à la théorie de Fourier, on obtient :

$$A_{mn} = \frac{1}{N_{mn}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} w_0(x, y) \varphi_{mn}(x, y) dx dy$$

$$B_{mn} = \frac{1}{N_{mn} \omega_{mn}} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \dot{w}_0(x, y) \varphi_{mn}(x, y) dx dy$$

$$\text{avec } N_{mn} = \frac{L_x L_y}{4}$$

## Chapitre 3

# Modélisation

### 3.1 Avec l'équation d'équilibre dans le cas d'une flexion simple

Ci-dessous, une simulation pour illustrer l'équation obtenue précédemment nous avons décidé de procéder à des simulations sur Maple. En gardant les mêmes conditions initiales c'est à dire le cas d'une plaque simplement appuyée. Nous avons décidé de choisir un matériau afin de pouvoir étudier son comportement. Nous avons donc choisi l'acier de construction. En effet nous avons modélisé la déformation d'une plaque d'acier d' $1m^2$  soumis à une pression uniformément répartie de  $10^6$  Pa. On a pris les conditions initiales suivantes :

**acier de construction:**  
 $E = 2.02 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$   
 $\nu = 0.3$   
 $h = 0.033 \text{ m}$   
 $D = E \cdot h^3 / (12 \cdot (1 - \nu))$

FIGURE 3.1 – Conditions prises pour l'acier

et nous avons obtenu le résultat suivant pour W11 et W33 :

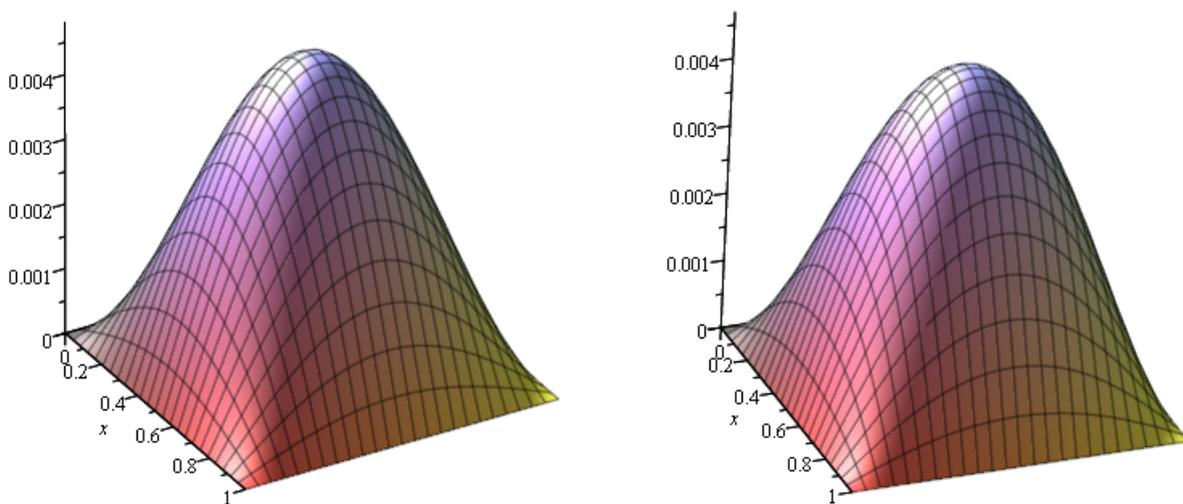


FIGURE 3.2 – Déformations obtenues avec l'équation d'équilibre pour l'acier

On peut remarquer que pour cet acier, on obtient finalement une flexion selon  $z$  d'environ 4,5 mm pour cette plaque de 3,3 cm d'épaisseur.

### 3.2 Avec l'équation d'évolution en fonction du temps

Avec le même matériau que précédemment,  $\rho = 8000kg.m^{-1}$  et une plaque d'épaisseur 5mm on obtient plusieurs animations décrivant le déplacement transversal  $W(x,y,z)$  en fonction du temps.

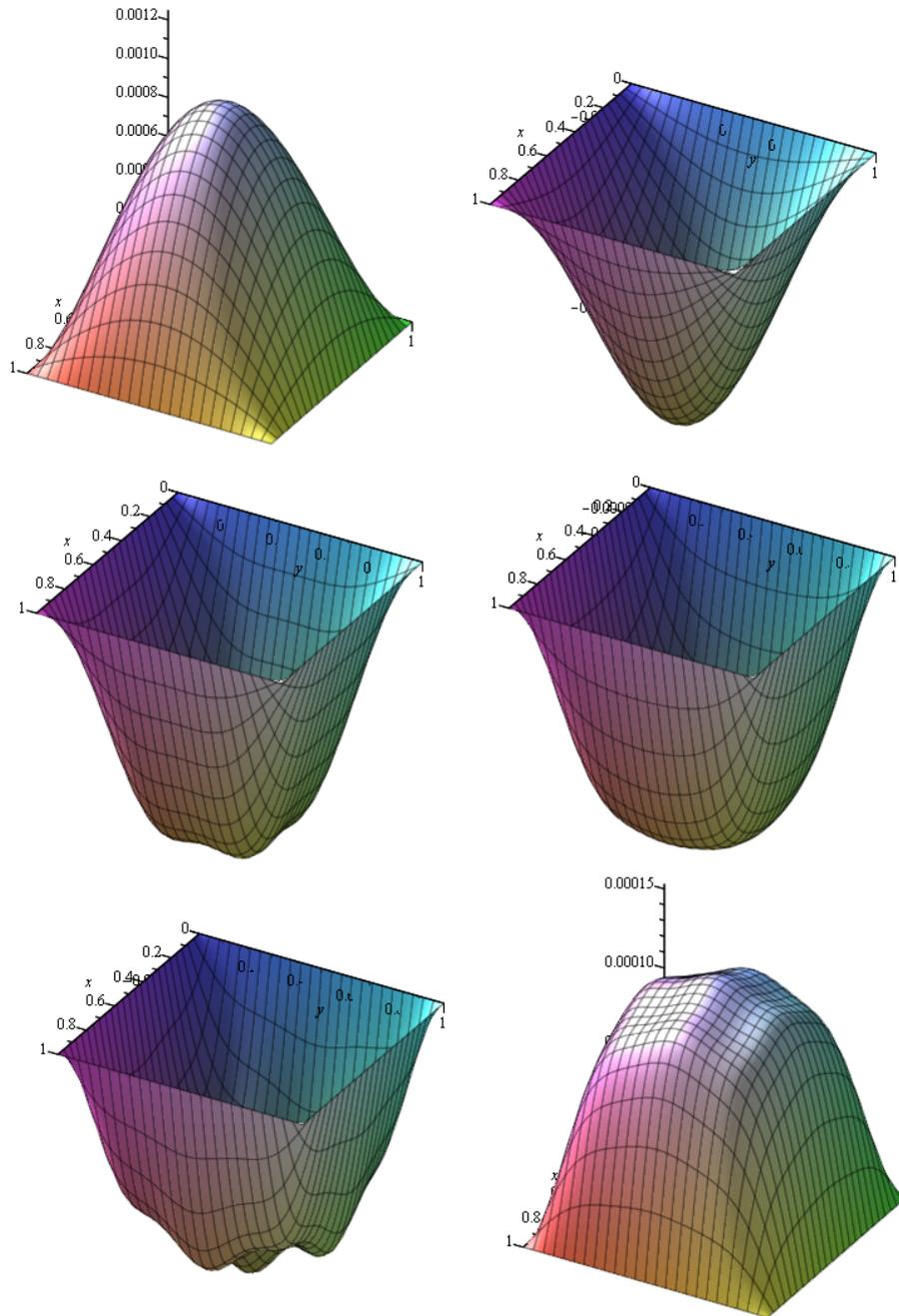


FIGURE 3.3 – Déformations obtenues au cours du temps pour l'acier

## Conclusion et perspectives

Au cours du semestre, nous avons cherché à comprendre comment se déforme une plaque. Ce projet nous a permis de développer nos connaissances sur le sujet et de mettre en application des notions étudiées de façon théorique en STPI. Nous avons également pu renforcer nos compétences bureautiques. Cette étude a été menée suivant plusieurs axes principaux comme les mathématiques, la physique et le numérique.

Cependant, durant cette étude, notre groupe a dû faire face à quelques difficultés. En effet, il n'est pas toujours aisé de travailler avec des personnes dont nous n'avons pas forcément l'habitude de côtoyer. Nous avons dû mettre nos différences de côté afin de travailler en groupe. L'écoute et le partage des idées fut un point déterminant pour mener le projet à son terme. Dès le début, le groupe a décidé de se répartir les tâches afin de progresser plus efficacement. Sur le plan collaboratif et social, l'expérience aura donc été enrichissante. La seconde difficulté à laquelle on aura été confrontés a été l'utilisation du logiciel de simulation Mapple. En effet, aucun membre du groupe ne savait l'utiliser. Il fut donc très complexe d'appliquer nos résultats mathématiques sur la machine afin de visualiser les déformées.

Enfin, nous souhaitons remercier Monsieur Gleyse, notre professeur, pour nous avoir aidé durant tout le semestre. Grâce à l'application de ses nombreux conseils, nous avons pu avancer de manière efficace.

# Bibliographie

- [1] La contrainte normale due à la flexion simple. <http://liengeniecivil.wifeo.com/documents/Cours-Contrainte-due--la-flexion-simple.pdf>.
- [2] Résistance des matériaux. [http://www.gecif.net/articles/mecanique/cours/resistance\\_des\\_materiaux.pdf](http://www.gecif.net/articles/mecanique/cours/resistance_des_materiaux.pdf).
- [3] Duhamel Denis Argoul, Pierre. Vibrations de poutres et de plaques. [https://educnet.enpc.fr/pluginfile.php/30206/mod\\_resource/content/2/Vibrationsdespoutresetdesplaques2016.pdf](https://educnet.enpc.fr/pluginfile.php/30206/mod_resource/content/2/Vibrationsdespoutresetdesplaques2016.pdf).
- [4] Ecole de technologie supérieure-Université du Québec. La théorie des plaques à paroi mince. [https://cours.etsmtl.ca/sys805/Documents/Notes\\_de\\_cours/SYS846-chap4-2.pdf](https://cours.etsmtl.ca/sys805/Documents/Notes_de_cours/SYS846-chap4-2.pdf).
- [5] Michel Ker. Méthodes de résolution des plaques rectangulaires. <https://www.edilivre.com/mag/frontwidget/preview/book/id/771828/>.
- [6] Olivier Millet. Méthodes asymptotiques pour les structures minces. <http://mam.ida.upmc.fr/Telechargements/cours-Millet.pdf>.
- [7] Bernard Nayroles. *Théorie des plaques, déplacement complémentaire et plaques stratifiées*. PhD thesis, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS Marseille, 2009.
- [8] Jean-Claude Pascal. Vibrations et acoustique 2. [http://perso.univ-lemans.fr/~jcpascal/Cours/ENSIM2A\\_Vibrations&Acoustique\\_2.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jcpascal/Cours/ENSIM2A_Vibrations&Acoustique_2.pdf).

# Annexes

## Annexe 1 : Etude d'une plaque rectangulaire en appui simple sur les bords avec un chargement uniforme $p_0$

Nous avons aussi trouver intéressant d'étudier la déformation d'une plaque rectangulaire en appui simple lorsqu'il y a un chargement uniforme  $p_0$ .

Soit  $p_{mn}$  le chargement qui est égale à :

$$p_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} p(x, y) \sin\left(\frac{m\Pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\Pi y}{L_y}\right) dx dy$$

Le chargement est uniforme si :  $p(x, y) = p_0$  d'où :

$$\begin{aligned} p_{mn} &= \frac{4p_0}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \sin\left(\frac{m\Pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\Pi y}{L_y}\right) dx dy \\ &= \frac{4p_0}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \sin\left(\frac{m\Pi x}{L_x}\right) dx \int_0^{L_y} \sin\left(\frac{n\Pi y}{L_y}\right) dy \\ &= \frac{4p_0}{L_x L_y} \times \left[ -\frac{L_x}{m\Pi} \cos\left(\frac{m\Pi x}{L_x}\right) \right]_0^{L_x} \times \left[ -\frac{L_y}{n\Pi} \cos\left(\frac{n\Pi y}{L_y}\right) \right]_0^{L_y} \\ &= \frac{4p_0}{L_x L_y} \times \left( \frac{-L_x}{m\Pi} \cos(m\Pi) + \frac{L_x}{m\Pi} \right) \times \left( \frac{-L_y}{n\Pi} \cos(n\Pi) + \frac{L_y}{n\Pi} \right) \\ &= \frac{4p_0}{L_x L_y} \times \left( \frac{L_x(1 - \cos(m\Pi))}{m\Pi} \right) \times \left( \frac{L_y(1 - \cos(n\Pi))}{n\Pi} \right) \\ &= \frac{4p_0(1 - \cos(m\Pi))(1 - \cos(n\Pi))}{m \times n\Pi^2} \end{aligned}$$

Si  $m$  ou  $n$  est pair alors  $p_{mn} = 0$ .

Cependant, si  $m$  et  $n$  sont impairs alors on a :

$$\begin{aligned} p_{mn} &= \frac{4p_0(1 - (-1))(1 - (-1))}{m \times n\Pi^2} \\ &= \frac{16p_0}{m \times n\Pi^2} \end{aligned}$$

Or, on a :

$$b_{mn} = \frac{p_{mn}}{D} \text{ et } a_{mn}\lambda = b_{mn}$$

Alors :

$$\begin{aligned} w &= \sum a_{mn} w_{mn} \\ &= \sum_{m,n} \frac{p_{mn}}{\left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2 \Pi^4 D} \sin\left(\frac{m\Pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\Pi y}{L_y}\right) \\ &= \frac{16p_0}{D\Pi^6} \sum_m \sum_n \left( \frac{\sin\left(\frac{m\Pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\Pi y}{L_y}\right)}{m \times n \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}\right)^2} \right) \end{aligned}$$

## Annexe 2 : détermination de l'équation différentielle en fonction de $X(x)$ , $Y(y)$ et $T(t)$

On a :

$$- D\nabla^4 W(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$- \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (2)$$

$$- W(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \quad (3)$$

En introduisant (3) dans (1) on a:

$$D\nabla^4(X(x)Y(y)T(t)) + \rho h \frac{\partial^2(X(x)Y(y)T(t))}{\partial t^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \nabla^4(X(x)Y(y)T(t)) = -\frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2(X(x)Y(y)T(t))}{\partial t^2}$$

D'après (2) :

$$\nabla^4(X(x)Y(y)T(t)) = \frac{\partial^4(X(x)Y(y)T(t))}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2(X(x)Y(y)T(t))}{\partial x^2} \frac{\partial^2(X(x)Y(y)T(t))}{\partial y^2} + \frac{\partial^4(X(x)Y(y)T(t))}{\partial y^4}$$

$$\Leftrightarrow \nabla^4(X(x)Y(y)T(t)) = YT \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} + 2TY \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \cdot TX \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + XT \frac{\partial^4 Y(y)}{\partial y^4}$$

$$\Leftrightarrow \nabla^4(X(x)Y(y)T(t)) = YT \cdot X^{(4)} + 2TY X'' \cdot XTY'' + XT \cdot Y^{(4)}$$

De plus,

$$\frac{\partial^2(X(x)Y(y)T(t))}{\partial t^2} = XY \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = XY \cdot \ddot{T}$$

On obtient donc notre équation :

$$YT \cdot X^{(4)} + 2TY X'' \cdot XTY'' + XT \cdot Y^{(4)} = -\frac{\rho h}{D} XY \cdot \ddot{T}$$

En divisant le tout par  $X(x) \cdot Y(y) \cdot T(t)$ , on obtient:

$$\frac{X^{(4)}}{X} + 2 \frac{X''}{X} \frac{Y''}{Y} + \frac{Y^{(4)}}{Y} = -\frac{1}{\mu^2} \frac{\ddot{T}}{T}$$

avec  $\mu^2 = \frac{D}{\rho h}$

### Annexe 3 : simplification de $Y(y)$

$$Y(y) = C_1 \sin(\gamma_1 y) + C_2 \cos(\gamma_1 y) + C_3 \sinh(\gamma_2 y) + C_4 \cosh(\gamma_2 y)$$

De plus on sait que  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  et  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  mais aussi  $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$  et  $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$   
d'où

$$Y(y) = C_1 \cdot \frac{1}{2i} (e^{i\gamma_1 y} - e^{-i\gamma_1 y}) + C_2 \cdot \frac{1}{2} (e^{i\gamma_1 y} + e^{-i\gamma_1 y}) + C_3 \cdot \frac{1}{2} (e^{i\gamma_2 y} - e^{-i\gamma_2 y}) + C_4 \cdot \frac{1}{2} (e^{i\gamma_2 y} + e^{-i\gamma_2 y})$$

donc

$$Y(y) = e^{i\gamma_1 y} \left( \frac{C_1}{2i} - \frac{C_2}{2} \right) + e^{-i\gamma_1 y} \left( \frac{C_2}{2} - \frac{C_1}{2i} \right) + e^{\gamma_2 y} \left( \frac{C_3}{2} - \frac{C_4}{2} \right) + e^{-\gamma_2 y} \left( \frac{C_4}{2} - \frac{C_3}{2} \right)$$

donc par identification

$$Y(y) = e^{i\gamma_1 y} (D_1) + e^{-i\gamma_1 y} (D_2) + e^{\gamma_2 y} (D_3) + e^{-\gamma_2 y} (D_4)$$

**Annexe 4 : calcul de  $\det(A)$**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin(\gamma_2 L_y) & \cos(\gamma_2 L_y) & \sinh(\gamma_1 L_y) & \cosh(\gamma_1 L_y) \\ 0 & -\gamma_2^2 & 0 & \gamma_1^2 \\ -\gamma_2^2 \sin(\gamma_2 L_y) & -\gamma_2^2 \cos(\gamma_2 L_y) & \gamma_1^2 \sinh(\gamma_1 L_y) & \gamma_1^2 \cosh(\gamma_1 L_y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ A & B & C & D \\ 0 & -\gamma_2^2 & 0 & \gamma_1^2 \\ E & F & G & H \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = - \begin{vmatrix} E & F & G & H \\ A & B & C & D \\ 0 & -\gamma_2^2 & 0 & \gamma_1^2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & G & F & H \\ A & C & B & D \\ 0 & 0 & -\gamma_2^2 & \gamma_1^2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & G \\ A & C \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -\gamma_2^2 & \gamma_1^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -\gamma_2^2 \sin(\gamma_2 L_y) & \gamma_1^2 \sinh(\gamma_1 L_y) \\ \sin(\gamma_2 L_y) & \sinh(\gamma_1 L_y) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -\gamma_2^2 & \gamma_1^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = [-\gamma_2^2 \sin(\gamma_2 L_y) \sinh(\gamma_1 L_y) - \sin(\gamma_2 L_y) \gamma_1^2 \sinh(\gamma_1 L_y)] (-\gamma_2^2 - \gamma_1^2)$$

$$\det(A) = \sin(\gamma_2 L_y) \sinh(\gamma_1 L_y) (-\gamma_2^2 - \gamma_1^2) (-\gamma_2^2 - \gamma_1^2)$$

$$\det(A) = \sin(\gamma_2 L_y) \sinh(\gamma_1 L_y) (\gamma_2^2 + \gamma_1^2)^2$$

### Annexe 5 : détermination de la solution $T(t)$

On a  $\beta^4 = -\frac{1}{\mu^2} \frac{\ddot{T}}{T} \implies \beta^4 \mu^2 T + \ddot{T} = 0$

On étudie le polynôme caractéristique :  $P(X) = X^2 + \beta^4 \mu^2$

On calcule le discriminant :  $\Delta = -4\beta^4 \mu^2 < 0$ , les solutions sont donc complexes

$$X_1 = \frac{-i\sqrt{4X^2\beta^4\mu^2}}{2} = -\frac{i2X\beta^2\mu}{2} = -iX\beta^2\mu$$

$$X_2 = \frac{i\sqrt{4X^2\beta^4\mu^2}}{2} = \frac{i2X\beta^2\mu}{2} = iX\beta^2\mu$$

Donc  $T(t) = A.\cos(\beta^2\mu t) + B.\sin(\beta^2\mu t)$