

Conduction Thermique



Étudiants :

ABDEL WAHAB Amr
ASTEGIANO Nathan
EL HACHEM Christophe
MESBAH Zacharia
QUEMBRE Hugo

Enseignant-responsable du projet :

Bernard GLEYSE

Date de remise du rapport : 16 juin 2019

Référence du projet : STPI/P6/2019 – 07

Intitulé du projet : Conduction Thermique

Type de projet : Modélisation, expérimentation

Objectifs du projet :

Notre projet de physique a pour sujet l'étude de la conduction thermique dans une barre de métal. Nous avons étudié l'équation de la chaleur en régime permanent. Contrairement aux années précédentes, notre étude est faite en deux dimensions sur une surface plane.

Pour cela, nous avons recherché les solutions exactes de l'équation de la chaleur en deux dimensions, d'une part pour une équation sans second membre, puis avec second membre, pour ensuite observer ces résultats sur le logiciel Maple.

D'un autre côté nous avons discrétisé les solutions au problème de conduction thermique. Nous avons utilisé une technique de maillage, puis avons observé les résultats à l'aide d'un programme sur Python.

Mots-clés du projet : Conduction, équation de la chaleur, solveur matriciel, régime permanent

Table des matières

Introduction	3
Organisation du travail	4
1 Résolution analytique de l'équation de la chaleur	5
1.1 Résolution de l'équation sans second membre	5
1.1.1 Résolution	5
1.1.2 Simulation sur maple	9
1.2 Résolution de l'équation avec second membre	10
1.2.1 Pour $f = y$	10
2 Résolution numérique discrète	12
2.1 Calcul des solution avec Maple	12
2.2 Extraction de valeurs pour comparaison	15
2.3 Calcul des solutions avec Python	16
2.3.1 Discrétisation des solutions en système linéaire ¹	16
2.3.2 Mise sous forme matricielle	19
2.3.3 Résolution du système matriciel	19
3 Comparaison des valeurs Maple et Python	21
3.1 Calcul des différences	21
3.2 Résultats et interprétation	21
Conclusion et perspectives	23
Bibliographie	23

1.

Introduction

Ce projet de physique s'inscrit dans le cadre de notre deuxième année en département STPI. Il nous est proposé d'étudier, par groupe, un phénomène scientifique : la conduction thermique. La conduction thermique est le transport d'énergie d'un point chaud à un point froid. Cet échange peut se faire par vibrations ou collisions particulières. C'est l'un des trois modes de transfert thermique. L'étude de la conduction, de la convection et du rayonnement reposent sur l'analyse des échanges de quantité de chaleur. Nous pouvons grâce à cela déterminer la température au sein du système étudié.

Puisque ce sujet a déjà été largement étudié en une dimension par les rapports précédents, nous l'avons étudié en deux dimensions. Notre étude se fait en régime stationnaire et a pour but de montrer l'impact de la conduction thermique sur l'évolution de la température dans une barre chauffée. Nous utiliserons des programmes et des logiciels pour illustrer au mieux nos résultats.

Aux premiers abords, ce projet est destiné plus particulièrement aux futurs élèves de la section énergétique et propulsion. Cependant, ce projet a nécessité de nombreuses compétences, qui sortent du cadre direct de la physique, comme en informatique et en mathématique.

Ce projet nous a également permis une fois de plus de travailler en équipe, ce qui est un exercice très important pour notre formation d'ingénieurs. La création de groupes sans affinités immédiates nous a fait découvrir le réel travail en collaboration. Nous avons utilisé un outil informatique, le GitLab, lors de la rédaction du rapport, qui nous a permis de rédiger indépendamment nos parties du rapport sans qu'il n'y ait de conflit de version.

Organisation du travail

Notre travail a tout d'abord commencé par une recherche documentaire sur le sujet de la conduction thermique. A l'aide des rapports des années précédentes, et d'informations trouvés sur internet, nous nous sommes rendu compte de la place majeure qu'occupe l'équation de la chaleur. Après avoir établi la liste des notions à étudier, nous avons réparti le reste du travail en fonction des envies et des compétences de chacun.

Nous avons réparti le travail de la façon suivante :

Travail effectué	Membre en charge	Semaine
Recherches documentaires	Tous	0 à 3
Travail sur l'équation de la chaleur	Tous	3 à 6
Resolution analytique	Hugo et Nathan	6 à 10
Etude de la technique du maillage	Zacharia et Christophe	6 à 8
Travail sur une discretisation numérique	Amr	6 à 8
Mise en place du code du maillage sur Python	Zacharia	8 à 10
Analyse des résultats sur Maple	Amr, Christophe, Hugo et Nathan	8 à 11
Redaction du rapport sur Lyx	Tous	11 à 13

Chapitre 1

Résolution analytique de l'équation de la chaleur

1.1 Résolution de l'équation sans second membre

1.1.1 Résolution

Nous cherchons à résoudre une équation de la forme $-\lambda\Delta T = f$ avec :

f : le terme source de la chaleur

λ : le coefficient de diffusion

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Nous cherchons une solution de la forme $T(x, y) = g(x)h(y)$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} h(y) = g''(x)h(y)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 h(y)}{\partial y^2} g(x) = h''(y)g(x)$$

Nous obtenons : $-\lambda(g''(x)h(y) + h''(y)g(x)) = f$

En supposant $f = 0$, on a :

$$g''(x)h(y) + h''(y)g(x) = 0$$

$$\frac{g''(x)}{g(x)} = -\frac{h''(y)}{h(y)}$$

Nous en déduisons que $\frac{g''(x)}{g(x)} = -\frac{h''(y)}{h(y)} = -k$ car les deux termes égaux dépendent de variables différentes

D'où $g''(x) + kg(x) = 0$

Si $k = 0$: $g(x) = ax + b$

Si $k < 0$: $g(x) = ae^{\sqrt{|k|x}} + be^{-\sqrt{|k|x}}$

Si $k > 0$: $g(x) = c \cos(k'x) + d \sin(k'x)$

De plus, on a : $T(0, y) = 0, T(x, 0) = 0, T(L_x, y) = 0, T(x, L_y) = F(x)$, ce qui implique les conditions suivantes :

$$g(0) = 0, g(L_x) = 0$$

$$h(0) = 0, h(L_y) = F(x)$$

Si $k = 0, b = 0$, et

$$g(L_x) = 0 \Leftrightarrow aL_x = 0 \Leftrightarrow a = 0 \implies g(x) = 0$$

Si $k < 0$,

$$g(0) = 0 \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a$$

$$g(L_x) = 0 \Leftrightarrow ae^{k'L_x} + be^{-k'L_x} = 0$$

$$ae^{k'L_x} - ae^{-k'L_x} = 0$$

$$a(e^{k'L_x} - e^{-k'L_x}) = 0$$

$$\implies g(x) = 0 \text{ ou } e^{k'L_x} - e^{-k'L_x} = 0$$

Si $k > 0$,

$$g(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

$$g(L_x) = 0 \Leftrightarrow d \sin(k'L_x) = 0$$

$$\sin(k'L_x) = 0$$

$$k'L_x = n\pi$$

$$k' = \frac{n\pi}{L_x}$$

$$\implies g(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right)$$

Nous avons donc

$$\boxed{g_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L_x}x\right)}$$

La 2e équation donnerait $h''(y) - kh(y) = 0$

$$\begin{aligned} h(y) &= \alpha e^{k_1 y} + \beta e^{-k_1 y} \\ &= (\alpha + \beta) \frac{e^{k_1 y} + e^{-k_1 y}}{2} + (\alpha - \beta) \frac{e^{k_1 y} - e^{-k_1 y}}{2} \\ &= \gamma \cosh(k_1 y) + \nu \sinh(k_1 y) \end{aligned}$$

De plus, nous savons que $h(0) = 0 \Leftrightarrow h(0) = \gamma \times 1 + \nu \times 0 = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$

$$\Rightarrow h(y) = \nu \sinh(k_1 y)$$

et $h(L_y) = F(x)$, nous supposons $F(x) = 0 \Rightarrow h(L_y) = 0$

$$h(L_y) = \nu \sinh(k_1 L_y) = 0$$

$$\Rightarrow h(y) = 0$$

Reprenons l'équation de départ :

$$\begin{aligned} -\lambda \Delta T &= f \\ -\lambda \Delta (h(y)g_n(x)) &= c_n(y)g_n(x) \\ -\lambda (h_n(y)g_n''(x) + h_n''(y)g_n(x)) &= c_n(y)g_n(x) \\ -\lambda (h_n(y)(\sin(\frac{n\pi x}{L_x}))'' + h_n''(y)\sin(\frac{n\pi x}{L_x})) &= c_n(y)\sin(\frac{n\pi x}{L_x}) \\ -\lambda (-h_n(y)(\frac{n\pi}{L_x})^2 \sin(\frac{n\pi x}{L_x}) + h_n''(y)\sin(\frac{n\pi x}{L_x})) &= c_n(y)\sin(\frac{n\pi x}{L_x}) \\ -\lambda (h_n''(y) - (\frac{n\pi}{L_x})^2 h_n(y)) &= c_n(y) \\ -\lambda (h_n''(y) - k_1 h_n(y)) &= c_n(y) \end{aligned}$$

Nous avons a prit f constant ce qui implique qu'on a $c_n(y)$ également constant. Grâce aux séries de Fourier, nous avons :

$$c_n = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} f \sin(\frac{n\pi x}{L_x}) dx$$

$$\text{D'où : } -\lambda (h_n''(y) - k_1 h_n(y)) = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} f \sin(\frac{n\pi x}{L_x}) dx$$

La solution particulière de cette équation est $h_p(y) = \frac{c_n}{\lambda k_1^2}$

Nous avons donc la solution de cette équation :

$$h = h_p + h_n = \frac{c_n}{\lambda k_1^2} + \gamma \cosh(k_1 y) + \nu \sinh(k_1 y)$$

Nous utilisons les conditions limites pour trouver γ et ν

$$h_n(0) = 0$$

$$\frac{c_n}{\lambda k_1^2} + \gamma \cosh(k_1 y) + \nu \sinh(k_1 y) = 0$$

$$\gamma \frac{e^0 + e^0}{2} + \nu \frac{e^0 - e^0}{2} + \frac{c_n}{\lambda k_1^2} = 0$$

$$\gamma + \frac{c_n}{\lambda k_1^2} = 0$$

$$\gamma = -\frac{c_n}{\lambda k_1^2}$$

$$h_n(L_y) = 0$$

$$-\frac{c_n}{\lambda k_1^2} \cosh(k_1 L_y) + \nu \sinh(k_1 L_y) + \frac{c_n}{\lambda k_1^2} = 0$$

$$\nu = \frac{c_n}{\lambda k_1^2} \frac{\cosh(k_1 L_y) - 1}{\sinh(k_1 L_y)}$$

$$\nu = \frac{c_n}{\lambda k_1^2} \frac{\cosh(k_1 L_y) - \cosh(0)}{\sinh(k_1 L_y)}$$

$$\nu = \frac{c_n}{\lambda k_1^2} \frac{2 \sinh^2\left(\frac{k_1 L_y}{2}\right)}{\sinh(k_1 L_y)}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} h_n(y) &= \frac{c_n}{\lambda k_1^2} (1 - \cosh(k_1 y)) + \frac{\cosh(k_1 L_y) - 1}{\sinh(k_1 L_y)} \sinh(k_1 y) \\ &= \frac{c_n}{\lambda k_1^2} \left(1 + \frac{\cosh(k_1 L_y) \sinh(k_1 y) - \cosh(k_1 y) \sinh(k_1 L_y) - 1}{\sinh(k_1 y)} \right) \\ &= \frac{c_n}{\lambda k_1^2} \left(1 + \frac{-\sinh(k_1(L_y - y)) - 1}{\sinh(k_1 y)} \right) \end{aligned}$$

$$h_n(y) = -\frac{c_n}{\lambda k_1^2} \left(\frac{\sinh(k_1(L_y - y)) + 1}{\sinh(k_1 y)} - 1 \right)$$

Ce qui donne

$$T(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) h_n(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \left(-\frac{c_n}{\lambda k_1^2}\right) \left(\frac{\sinh(k_1(L_y - y)) + 1}{\sinh(k_1 y)} - 1\right)$$

avec :

$$c_n = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} f \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) dx$$

1.1.2 Simulation sur maple

Nous avons ensuite simulé les résultats précédents sur maple.

```

> b_n := 2/L_x int(f sin(k x), x=0..L_x);
                                     b_n := -4(-1+(-1)^n)/
                                     n~pi
> c_n := b_n/sinh(k L_y);
                                     c_n := -4(-1+(-1)^n)/
                                     n~pi sinh(n~pi)
> S10 := sum(c_n sinh(k y) sin(k x), n=1..10);
S10 = 8 sinh(1/2 pi y) sin(1/2 pi x) / (pi sinh(pi)) + 8/3 sinh(3/2 pi y) sin(3/2 pi x) / (pi sinh(3 pi)) + 8/5 sinh(5/2 pi y) sin(5/2 pi x) / (pi sinh(5 pi)) + 8/7 sinh(7/2 pi y) sin(7/2 pi x) / (pi sinh(7 pi)) + 8/9 sinh(9/2 pi y) sin(9/2 pi x) / (pi sinh(9 pi))

```

FIGURE 1.1 – Simulation de l'équation sans second membre sur maple

Comme on peut le voir sur la dernière ligne de code, sur maple, on ne peut pas simuler la fonction $T(x, y)$ avec une somme infinie, on doit choisir un indice max pour la somme. Le résultat va donc évoluer en fonction du nombre de termes de la somme et être plus précis pour un nombre de termes plus élevé. Nous avons donc simulé le résultat pour une somme allant jusqu'à 10 termes, 40 termes, 60 termes, et enfin 100 termes.

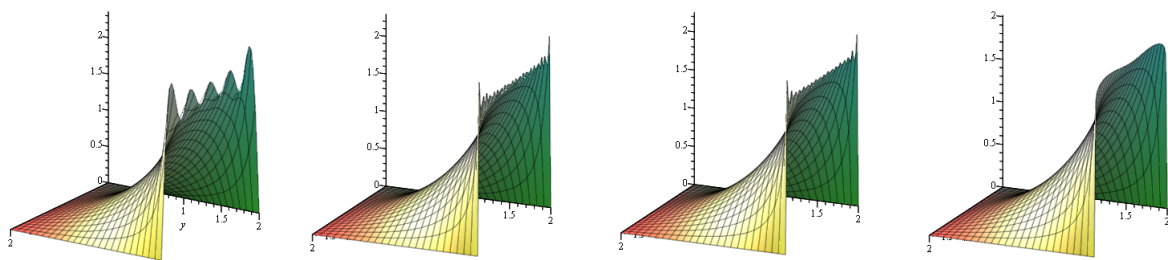


FIGURE 1.2 – Graphique de la Température dans le plan en fonction du nombre de termes

On observe que la différence marquante entre les différents graphiques se situent sur le front, c'est à dire sur la courbe $T(x, L_y)$. Nous pouvons étudier la différence entre les graphiques en traçant la courbe $T(x, 2)$. On y voit que lorsque l'on ajoute des termes à la somme, $T(x, L_y)$ tend vers une fonction constante $T(x, L_y) = 2$. Cependant, les variations se condensent aux bords, c'est à dire vers $T(0, L_y)$ et $T(L_x, L_y)$.

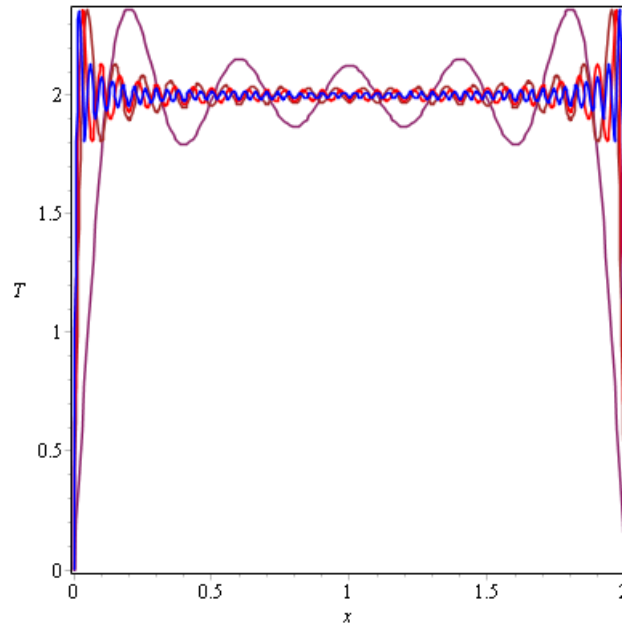


FIGURE 1.3 – Courbes de $T(x, L_y)$ en fonction du nombre de termes de la somme

1.2 Résolution de l'équation avec second membre

1.2.1 Pour $f = y$

On cherche à maintenant à résoudre le même équation mais avec un second membre, $f = y$. La résolution de l'équation est la même jusqu'à la détermination de $g_n(x) = \sin(\frac{n\pi x}{L_x})$. On a donc de nouveau

$$-\lambda(h_n''(y) - k_1 h_n(y)) = c_n(y)$$

or cette fois, nous avons

$$\begin{aligned} c_n(y) &= \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} y \times \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) dx \\ &= y \times \left(\frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) dx\right) \\ &= ay \end{aligned}$$

où $a = \left(\frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) dx\right)$. Ainsi on obtient une fonction affine de la forme $c_n(y) = ay$. L'équation peut maintenant être présentée sous la forme suivante :

$$\frac{-\lambda}{a} h''(y) - \frac{\lambda k_1}{a} h_n(y) = y$$

Une solution particulière de cette équation est $h_p(y) = \frac{a}{\lambda k_1} y$. On a vu lors de la résolution précédente que la solution homogène de cette équation était de la forme $h_n(y) = \gamma \cosh(k_1 y) + \nu \sinh(k_1 y)$. Nous avons les conditions limites suivantes $h_n(0) = 0$ et $h_n(L_y) = 0$. On peut donc en déduire que

$$\begin{aligned} h_n(y) &= \gamma \cosh(k_1 y) + \nu \sinh(k_1 y) + \frac{a}{\lambda k_1} \times 0 = 0 \\ &= \gamma \frac{e^0 + e^0}{2} + \nu \frac{e^0 - e^0}{2} = 0 \\ &\quad \gamma = 0 \end{aligned}$$

Ainsi que

$$h_n(L_y) = \nu \sinh(k_1 L_y) + \frac{a}{\lambda k_1} L_y = 0$$

$$\nu \sinh(k_1 L_y) = -\frac{a}{\lambda k_1} L_y$$

$$\nu = \frac{-a L_y}{\lambda k_1 \sinh(k_1 L_y)}$$

Nous avons donc

$$h_n(y) = \frac{a}{\lambda k_1} y - \frac{a L_y}{\lambda k_1 \sinh(k_1 L_y)} \sinh(k_1 y)$$

$$h_n(y) = \frac{a}{\lambda k_1} \left(y - \frac{L_y}{\sinh(k_1 L_y)} \sinh(k_1 y) \right)$$

Ce qui donne

$$T(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) h_n(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \frac{a}{\lambda k_1} \left(y - \frac{L_y}{\sinh(k_1 L_y)} \sinh(k_1 y) \right)$$

Comme lors de la première résolution, nous avons simulé ces résultats sur Maple et obtenons la figure suivante

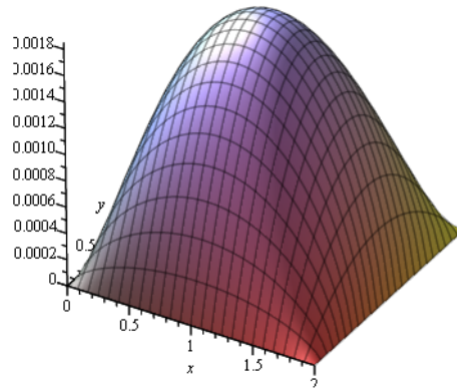


FIGURE 1.4 – Graphique de la Température dans le plan dans le cas $f = y$

Chapitre 2

Résolution numérique discrète

2.1 Calcul des solution avec Maple

1- Déterminations des solutions analytiques à l'équations de la chaleur en 1D :

L'équation générale de la chaleur dans un milieu a pour expression :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

Avec T le champ scalaire de température $T(x, y, z, t)$ dépendant des coordonnées d'espace et du temps et k un coefficient dépendant du milieu étudié.

Nous allons ici traiter le cas unidimensionnel instationnaire. T s'écrira donc $T(x, t)$.

En pratique, la résolution de ce cas permet par exemple d'étudier, au cours du temps, la propagation de chaleur dans une barre de fer de longueur L et de section négligeable.

Le principe de base se base sur la séparation des variables x et t , c'est à dire que l'on va chercher deux fonctions f et g telles que :

$$T(x, t) = f(t)g(x)$$

La résolution de ce type d'équation (EDP-ED) dépend des conditions initiales sur la température :

On pose par choix que la température aux bords de la tige est nulle :

$$T(x = 0, t) = 0$$

et

$$T(x = l, t) = 0, \forall t \geq 0$$

De même on suppose que la température initiale est connue dans la tige cela signifie donc qu'il existe $p(x)$ telle que :

$$T(x, t = 0) = p(x), \forall x \in [0, l]$$

[Remarque : On ne peut rien justifier quant à l'existence de telles fonctions . Seule la résolution sous cette forme permettra de conclure].

Il vient par opérations sur les dérivées que :

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial(f(t)g(x))}{\partial t} = k \frac{\partial^2(fg)}{\partial x^2}.$$

$$\iff \frac{df}{dt}g = kf \frac{d^2g}{dx^2}.$$

On a alors l'égalité :

$$\frac{1}{k} \frac{1}{f} \frac{df}{dt} = \frac{1}{g} \frac{d^2g}{dx^2}.$$

Si on pose $A(t) = \frac{1}{f} \frac{df}{dt}$ et $B(x) = \frac{1}{g} \frac{d^2g}{dx^2}$, alors on a deux fonctions de deux variables différentes qui sont égales. Elles sont alors constantes.

Preuve : évident car $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t} = 0$ donc $A(t) = B(x) = h$, avec h une constante réelle. ceci est vrai car on considère x et t indépendants.

On se ramène alors à un système d'équations différentielles ordinaires couplées par h :

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dt} = hk \iff \frac{df}{dt} - hkf = 0$$

$$\frac{1}{g} \frac{d^2g}{dx^2} = h \iff \frac{d^2g}{dx^2} - gh = 0$$

Pour résoudre ces équations il nous faut donc trouver les valeurs de h (noeuds du système) ainsi que les conditions aux bords sur f et g .

Partons des conditions posées sur la température :

$$T(0, t) = g(0)f(t) = 0$$

et

$$T(l, t) = g(l)f(t) = 0$$

Remarquons que si f ou g est nulle alors on se ramène au cas trivial où T est nulle. On considère alors f et g non nulles. Autrement dit il existe t_0 vérifiant :

$$T(0, t_0) = g(0)f(t_0) = 0$$

ainsi que

$$T(l, t_0) = g(l)f(t_0) = 0$$

On a alors $g(0) = g(l) = 0$.

Méthode pour déterminer h : Pour h fixé On effectue une disjonction de cas en fonction du signe du discriminant du polynôme caractéristique. On vérifiera la pertinence des solutions g calculées en fonction des conditions aux bords trouvées ci-dessus.

l'équation $g'' - gh = 0$ admet $P_g(r) = r^2 - h$. $\Delta P_g = 4h$.

Cas n1 : $\Delta P_g \geq 0$ alors $h \geq 0$. alors les racines de P_g sont $-\sqrt{|h|}$ et $+\sqrt{|h|}$. g s'écrit donc :

$$\forall x \in [0, l], g(x) = a_1 e^{-\sqrt{h}x} + a_2 e^{\sqrt{h}x}$$

Vérifions que les conditions aux bords sont pertinentes :

$$g(x=0) = a_1 + a_2 = 0 \implies a_1 = -a_2$$

$$g(l) = a_1 e^{-\sqrt{h}l} + a_2 e^{\sqrt{h}l} = 0 \implies a_2 \left(\overbrace{e^{\sqrt{h}l} - e^{-\sqrt{h}l}}^{\text{Réel non nul car } l \neq 0} \right) = 0 \implies a_2 = 0$$

On a donc $g(x) = 0$ ce qui est exclu. Si h existe, alors $h < 0$.

Cas n2 : $\Delta P_g < 0$ alors $h < 0$. Posons $h = -v^2 < 0, v \in R^{+*}$.
 $P_g(r) = r^2 - h = r^2 + v^2$. On a alors $-i|v|$ et $i|v|$ racines de P_g .

Il vient :

$$\forall x \in [0, l], g(x) = a_1 \cos(|v|.x) + a_2 \sin(|v|.x)$$

et d'après les conditions aux bords sur g on a :

$$g(0) = a_1 = 0$$

$$g(l) = a_2 \sin(|v|.l) = 0$$

Si a_2 est nul alors on se ramènerait au cas trivial.

On a alors :

$$\sin(|v|.l) = 0 \iff |v|.l = k\pi \iff |v| = \frac{k\pi}{l} \iff h = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$$

On pose donc pour $k \geq 0$ (on a une infinité on fait donc varier la constante en fonction de l'indice k) :

$$g_k(x) = a_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

les fonctions solutions de l'équation 2 associées à l'ensemble des noeuds du système de la forme :

$$h_k = \left\{ -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k \in N \right\}$$

On s'intéresse maintenant à l'équation $f' - hf = 0$. on cherche à trouver les valeurs de h vérifiant cette équation compte tenu des éventuelles conditions initiale sur f .

une solution de cette équation est de la forme :

$$f(t) = Ae^{ht}, A \in R$$

On a à $t = 0$: $f(t = 0) = A$. nous n'avons donc aucune condition sur h (ni sur A pour l'instant) dans f compte tenu de nos conditions initiales établies précédemment. Ainsi les fonctions solutions de la première équation différentielle s'écrivent sous la forme :

$$f_k(t) = A_k e^{h_k t}, A_k \in R$$

Enfin on a :

$$T_k(x, t) = g_k(x)f_k(t) = a_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) A_k e^{h_k t}$$

La résolution générale de ce système (recherche de deux fonctions uniques f et g) nous à conduit à une solution T_k qui dépend du noeud choisi h_k . En réalité, la méthode de séparation des variables nous avons calculé des solutions particulières (pour chaque noeud) du problème traité. L'EDP étant linéaire et homogène et les conditions aux bords également, on applique (par analogie avec les ED) le principe de superposition :

$$T(x, t) = \sum T_k(x, t) = \sum a_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) A_k e^{h_k t} = \sum b_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) e^{h_k t}$$

On retrouve bien les conditions initiales sur T . Pour $x = 0$, on a $\sin(\beta x) = 0$ donc $T(x = 0, t) = 0$ et pour $x = l$ on a $\sin(k\pi) = 0$ et par conséquent $T(x = l, t) = 0$

Déterminons les coefficients b_k de la série obtenue . pour $x \in [0, l]$ à $t = 0$:

$$T(x, t = 0) = p(x) = \sum b_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$$

On obtient alors une série de fourier en $\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$. On calcule les b_k par application du cours de M9 :

On fabrique une fonction P de $R \rightarrow C$ vérifiant les conditions de Dirichlet à partir de p sur $]0, l[$.

On suppose H $2l$ -périodique telle que :

$$\forall x \in R, P(x + 2l) = P(x)$$

$$P(x) = p(x), x \in [0, l]$$

On suppose de même P impaire. Pour chaque point de discontinuité on vérifie la propriété de la moyenne de Dirichlet.

P est alors continue par morceau et $2l$ périodique sur R . On va supposer de plus que P est C^1 par morceau (la dérivée est finie) sur R .

Dans ces conditions on démontre le théorème de convergence ponctuelle c'est à dire $P(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(P)(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum \phi(e_k, P) e^{k \frac{\pi}{l} i x}$.

En développant le produit scalaire hermitien $\phi(e_n, P)$ sur $2l$ et en simplifiant grâce à la parité de $p, \sin(x)$ et $\cos(x)$ et de leurs produit on obtient :

$$b_k = \frac{2}{l} \int_{-l}^l (P \sin(\frac{k\pi}{l} x)).$$

2.2 Extraction de valeurs pour comparaison

La feuille de calcul Maple nous permet, grâce à une boucle de récupérer un certain nombre de points. Cependant, contrairement à ce que nous allons voir dans la partie suivante, nous ne calculons pas les valeurs à l'aide d'un maillage, mais nous apposons en quelque sorte un maillage sur notre modèle de calcul.

2.3 Calcul des solutions avec Python

Une autre façon de calculer des solutions discrètes est de coder un solveur matriciel. en effet, les équations linéaires peuvent être traduites en matrices, ce qui les rend solvables par des algorithmes.

2.3.1 Discrétisation des solutions en système linéaire ¹

Nous avons débuté notre résolution par la mise en place des équations suivantes :

$$\Delta T = \frac{\delta^2 T}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta y^2} = 0$$

$$T(0, y) = T_g \text{ et } T(L_x, y) = T_d \quad 0 < y < L_y$$

$$T(x, 0) = T_b \text{ et } T(x, L_y) = T_h \text{ la température en } (x_i, y_j). \text{ On note } T_{i,j} \approx T(x_i, y_j).$$

On utilise pour cela un schéma centré d'ordre 2, en considérant successivement les variations de i puis celles de j .

Le développement de la formule de Taylor-Young en un schéma centré d'ordre 2² se déroule comme suit :

$$T_{(i+1,j)} = T_{ij} + \sum_{n=1}^3 \frac{\Delta h^n}{n!} \frac{\delta^n T_{i,j}}{\delta h^n} + \Delta h^3 \epsilon_3(h, \Delta h)$$

$$T_{(i+1,j)} = T_{ij} + \Delta h \frac{\delta T_{i,j}}{\delta h} + \frac{\Delta h^2}{2} \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta h^2} + \frac{\Delta h^3}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta h^3} + \Delta h^3 \epsilon_3(h, \Delta h)$$

$$T_{(i+1,j)} - T_{ij} = \Delta h \frac{\delta T_{i,j}}{\delta h} + \frac{\Delta h^2}{2} \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta h^2} + \frac{\Delta h^3}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta h^3} + \Delta h^3 \epsilon_3(h, \Delta h)$$

$$\frac{T_{(i+1,j)} - T_{ij}}{\Delta h} = \frac{\delta T_{i,j}}{\delta h} + \frac{\Delta h}{2} \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta h^2} + \frac{\Delta h^2}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta h^3} + \Delta h^2 \epsilon_2(h, \Delta h)$$

$$\frac{T_{(i+1,j)} - T_{ij}}{\Delta h} = \frac{\delta T_{i,j}}{\delta h} + \frac{\Delta h}{2} \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta h^2} + \frac{\Delta h^2}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta h^3} + \Delta h^2 \epsilon_2(h, \Delta h)$$

$$T_{(i-1,j)} = T_{ij} + \sum_{n=1}^3 \frac{(-\Delta h)^n}{n!} \frac{\delta^n T_{i,j}}{\delta x^n} + \Delta h^3 \epsilon_3(h, \Delta h)$$

$$T_{(i-1,j)} = T_{ij} - \Delta h \frac{\delta T_{i,j}}{\delta x} + \frac{\Delta h^2}{2} \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta x^2} - \frac{\Delta h^3}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta x^3} + \Delta h^3 \epsilon_3(h, \Delta h)$$

$$T_{(i-1,j)} - T_{ij} = \Delta h \frac{\delta T_{i,j}}{\delta x} + \frac{\Delta h^2}{2} \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta x^2} - \frac{\Delta h^3}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta x^3} + \Delta h^2 \epsilon_2(h, \Delta h)$$

$$\frac{T_{(i-1,j)} - T_{ij}}{\Delta h} = \frac{\delta T_{i,j}}{\delta h} + \frac{\Delta h}{2} \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta h^2} - \frac{\Delta h^2}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta h^3} + \Delta h^2 \epsilon_2(x, h)$$

En soustrayant les deux expressions, on obtient une approximation de $\frac{\delta T_{i,j}}{\delta h}$:

$$\frac{\delta T_{i,j}}{\delta h} \approx \frac{T_{(i+1,j)} - T_{(i-1,j)}}{2\Delta h}$$

1.
2. [1]

On répète la même opération pour les variations de j :

$$T_{(i,j+1)} = T_{ij} + \sum_{n=1}^3 \frac{\Delta^n}{n!} \frac{\delta^n T_{i,j}}{\delta k^n} + \Delta k^3 \epsilon_3(k, \Delta k)$$

$$T_{(i,j+1)} = T_{ij} + \Delta k \frac{\delta T_{i,j}}{\delta k} + \frac{\Delta k^2}{2} \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta k^2} + \frac{\Delta k^3}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta k^3} + \Delta k^3 \epsilon_3(k, \Delta k)$$

$$T_{(i,j+1)} - T_{ij} = \Delta k \frac{\delta T_{i,j}}{\delta k} + \frac{\Delta k^2}{2} \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta k^2} + \frac{\Delta k^3}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta k^3} + \Delta k \epsilon_3(k, \Delta k)$$

$$\frac{T_{(i,j+1)} - T_{ij}}{\Delta h} = \frac{\delta T_{i,j}}{\delta k} + \frac{\Delta k}{2} \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta k^2} + \frac{\Delta k^2}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta k^3} + \Delta k^2 \epsilon_3(k, \Delta k)$$

$$\frac{T_{(i,j+1)} - T_{ij}}{\Delta h} = \frac{\delta T_{i,j}}{\delta x} + \frac{\Delta h}{2} \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta h^2} + \frac{h^2}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta h^3} + \Delta k^2 \epsilon_2(x, h)$$

$$T_{(i,j-1)} = T_{ij} + \sum_{n=1}^3 \frac{(-\Delta k)^n}{n!} \frac{\delta^n T_{i,j}}{\delta k^n} + h^3 \epsilon_3(k, \Delta k)$$

$$T_{(i,j-1)} = T_{ij} - \Delta k \frac{\delta T_{i,j}}{\delta k} + \frac{\Delta k^2}{2} \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta k^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta k^3} + h^3 \epsilon_3(k, \Delta k)$$

$$T_{(i,j-1)} - T_{ij} = \Delta k \frac{\delta T_{i,j}}{\delta k} + \frac{\Delta k^2}{2} \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta k^2} - \frac{\Delta k^3}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta k^3} + h^3 \epsilon_3(k, \Delta k)$$

$$\frac{T_{(i,j-1)} - T_{ij}}{h} = \frac{\delta T_{i,j}}{\delta x} + \frac{h}{2} \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta x^2} - \frac{h^2}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta x^3} + \Delta k^2 \epsilon_2(x, h)$$

En soustrayant les deux expressions, on obtient une approximation de $\frac{\delta T_{i,j}}{\delta k}$:

$$\frac{\delta T_{i,j}}{\delta k} \approx \frac{T_{(i,j+1)} - T_{(i,j-1)}}{2\Delta k}$$

On développe à nouveau en partant de la formule de Taylor-Young, en ayant cette fois une expression approximative de $\frac{\delta T_{i,j}}{\delta h}$ en fonction de $T_{(i+1,j)}$ et $T_{(i-1,j)}$; et de $\frac{\delta T_{i,j}}{\delta k}$ en fonction de $T_{(i,j+1)}$ et $T_{(i,j-1)}$. On se retrouve donc à l'avant-dernière étape de nos calculs

$$\frac{T_{(i+1,j)} - T_{ij}}{\Delta h} = \frac{\delta T_{i,j}}{\delta h} + \frac{\Delta h}{2} \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta h^2} + \frac{\Delta h^2}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta h^3} + \Delta h^2 \epsilon_2(h, \Delta h)$$

$$\frac{T_{(i+1,j)} - T_{ij}}{\Delta h} - \frac{\delta T_{i,j}}{\delta h} = \frac{\Delta h}{2} \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta h^2} + \frac{\Delta h^2}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta h^3} + \Delta h^2 \epsilon_2(h, \Delta h)$$

$$\frac{T_{(i+1,j)} - 2T_{ij} - T_{(i-1,j)}}{2\Delta h} = \frac{\Delta h}{2} \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta h^2} + \frac{\Delta h^2}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta h^3} + \Delta h^2 \epsilon_2(h, \Delta h)$$

$$\frac{T_{(i+1,j)} - 2T_{ij} - T_{(i-1,j)}}{\Delta h^2} = \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta h^2} + \frac{\Delta h}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta h^3} + \Delta h \epsilon_2(h, \Delta h)$$

Ainsi, nous avons une approximation de $\frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta h^2}$ en fonction de $T_{ij}, T_{(i+1,j)}$, et $T_{(i-1,j)}$:

$$\frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta h^2} \approx \frac{T_{(i+1,j)} - 2T_{ij} - T_{(i-1,j)}}{\Delta h^2}$$

$$\frac{T_{(i,j+1)} - T_{ij}}{\Delta k} = \frac{\delta T_{i,j}}{\delta k} + \frac{\Delta k}{2} \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta k^2} + \frac{\Delta k^2}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta k^3} + \Delta k^2 \epsilon_3(k, \Delta k)$$

$$\frac{T_{(i,j+1)} - T_{ij}}{\Delta k} - \frac{\delta T_{i,j}}{\delta k} = \frac{\Delta k}{2} \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta k^2} + \frac{\Delta k^2}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta k^3} + \Delta k^2 \epsilon_3(k, \Delta k)$$

$$\frac{2T_{(i,j+1)} - 2T_{ij} - T_{(i,j+1)} - T_{(i,j-1)}}{2\Delta k} = \frac{\Delta k}{2} \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta k^2} + \frac{\Delta k^2}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta k^3} + \Delta k^2 \epsilon_3(k, \Delta k)$$

$$\frac{T_{(i,j+1)} - 2T_{ij} + T_{(i,j-1)}}{\Delta k^2} = \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta k^2} + \frac{\Delta k}{6} \frac{\delta^3 T_{i,j}}{\delta k^3} + \Delta k \epsilon_3(k, \Delta k)$$

Finalement, une approximation de $\frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta k^2}$ en fonction de $T_{i,j}, T_{i,j+1}$ et $T_{i,j-1}$:

$$\frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta k^2} \approx \frac{T_{(i,j+1)} - 2T_{ij} + T_{(i,j-1)}}{\Delta k^2}$$

En reprenant notre première équation $\Delta T = 0$, on obtient :

$$\Delta T = \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta h^2} + \frac{\delta^2 T_{i,j}}{\delta k^2} \approx \frac{T_{(i+1,j)} - 2T_{ij} - T_{(i-1,j)}}{\Delta h^2} + \frac{T_{(i,j+1)} - 2T_{ij} + T_{(i,j-1)}}{\Delta k^2} = 0$$

$$\frac{T_{(i+1,j)} - 2T_{ij} - T_{(i-1,j)}}{\Delta h^2} + \frac{T_{(i,j+1)} - 2T_{ij} + T_{(i,j-1)}}{\Delta k^2} = 0$$

$$\frac{T_{(i+1,j)} - 2T_{ij} - T_{(i-1,j)}}{\Delta h^2} = - \frac{T_{(i,j+1)} - 2T_{ij} + T_{(i,j-1)}}{\Delta k^2}$$

$$\Delta k^2 T_{(i+1,j)} - 2T_{ij} - T_{(i-1,j)} = -\Delta h^2 T_{(i,j+1)} - 2T_{ij} + T_{(i,j-1)}$$

$$\Delta k^2 (T_{(i+1,j)} - 2T_{ij} - T_{(i-1,j)}) + \Delta h^2 (T_{(i,j+1)} - 2T_{ij} + T_{(i,j-1)}) = 0$$

$$\Delta k^2 (T_{(i+1,j)} + T_{(i-1,j)}) + \Delta h^2 (T_{(i,j+1)} + T_{(i,j-1)}) - 2T_{i,j} (\Delta h^2 + \Delta k^2) = 0$$

En posant $A = \Delta h^2 + \Delta k^2$, on obtient l'équation :

$$\Delta k^2 (T_{(i+1,j)} + T_{(i-1,j)}) + \Delta h^2 (T_{(i,j+1)} + T_{(i,j-1)}) - 2T_{i,j} A = 0$$

2.3.2 Mise sous forme matricielle

Sachant que dans l'équation $T_{i,j}$ est définie en fonction de $T_{(i+1,j)}, T_{(i-1,j)}, T_{(i,j+1)}$ et $T_{(i,j-1)}$, on peut la calculer récursivement à l'aide de matrices. en manipulant l'équation trouvée ci-dessus, on obtient le système matriciel suivant.

Soit $N = P = 3$:

$$\begin{bmatrix} -2A & \Delta k^2 & 0 & \Delta h^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta k^2 & -2A & \Delta k^2 & 0 & \Delta h^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta k^2 & -2A & 0 & 0 & \Delta h^2 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta h^2 & 0 & 0 & -2A & \Delta k^2 & 0 & \Delta h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta h^2 & 0 & \Delta k^2 & -2A & 0 & 0 & \Delta h^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta h^2 & 0 & \Delta k^2 & -2A & \Delta k^2 & 0 & \Delta h^2 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta h^2 & 0 & 0 & -2A & \Delta k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta h^2 & 0 & \Delta k^2 & -2A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta h^2 & 0 & \Delta k^2 & -2A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \\ T_{21} \\ T_{22} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{32} \\ T_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta h^2 T_b + \Delta k^2 T_g \\ \Delta h^2 T_b \\ \Delta h^2 T_b + \Delta k^2 T_d \\ \Delta k^2 T_g \\ 0 \\ \Delta k^2 T_d \\ \Delta h^2 T_h + \Delta k^2 T_g \\ \Delta h^2 T_h \\ \Delta h^2 T_h + \Delta k^2 T_d \end{bmatrix}$$

2.3.3 Résolution du système matriciel

Nous recherchons les valeurs de la matrice colonne $[T_{11}..T_{N,P}]$. Nous devons résoudre un système de la forme $AX + B$.

Nous utilisons la fonction `linalg.solve` du module `numpy` de Python. Celle-ci se sert d'une routine codée en FORTRAN, la routine LA-PACK, qui définit une façon optimale de résoudre un système linéaire algébrique sous forme de matrices. Dans notre cas, la routine identifie la matrice A comme une matrice tridiagonale. en effet :

$$A = \begin{bmatrix} -2A & \Delta k^2 & 0 & \Delta h^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta k^2 & -2A & \Delta k^2 & 0 & \Delta h^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta k^2 & -2A & 0 & 0 & \Delta h^2 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta h^2 & 0 & 0 & -2A & \Delta k^2 & 0 & \Delta h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta h^2 & 0 & \Delta k^2 & -2A & 0 & 0 & \Delta h^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta h^2 & 0 & \Delta k^2 & -2A & \Delta k^2 & 0 & \Delta h^2 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta h^2 & 0 & 0 & -2A & \Delta k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta h^2 & 0 & \Delta k^2 & -2A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta h^2 & 0 & \Delta k^2 & -2A \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} D & I & 0 \\ I & D & I \\ 0 & I & D \end{bmatrix}$$

Avec

$$D = \begin{bmatrix} -2A & \Delta k^2 & 0 \\ \Delta k^2 & -2A & \Delta k^2 \\ 0 & \Delta k^2 & -2A \end{bmatrix} \text{ et } I = \begin{bmatrix} \Delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta^2 \end{bmatrix}$$

A partir de là, la routine utilise l'algorithme de Thomas matriciel (appelé gesv dans la bibliothèque). Intégré dans notre programme, cela donne :

```

Maillage.py *
98
99
100 mat_premier_membre = get_premier_membre(nb_noeuds_X, nb_noeuds_Y, Lmax_X, Lmax_Y) # obtenir La matrice du premier membre
101 mat_second_membre = get_second_membre(nb_noeuds_X, nb_noeuds_Y, Td, Tb, Tg, Th) # obtenir la matrice du second membre
102                                     # (conditions initiales)
103
104 maillage_vertical = np.linalg.solve(mat_premier_membre, mat_second_membre)
105
106 X, Y = drawing_get_grid(nb_noeuds_X, nb_noeuds_Y, Lmax_X, Lmax_Y)
107
108 maillage = np.zeros((nb_noeuds_X, nb_noeuds_Y)) #Initialisation du maillage
109
110 for i in range(nb_noeuds_X): # Transfert des valeurs depuis le vecteur colonne vers le maillage
111     for j in range(nb_noeuds_Y):
112         maillage[i, j] = maillage_vertical[nb_noeuds_X * j + i]
113
114 ax.plot_surface(X, Y, maillage)
115
116 plt.xlabel('X', fontsize=18)
117 plt.ylabel('Y', fontsize=16)
118 plt.show()
119
120 print(maillage)
121

```

Extrait du code permettant de calculer les solutions discrètes

Chapitre 3

Comparaison des valeurs Maple et Python

3.1 Calcul des différences

La dernière expérience que nous avons voulu effectuer est une comparaison entre les valeurs obtenues par le calcul exact des solutions discrètes via Maple et celles obtenues avec la technique du maillage via Python. Nous récupérons les valeurs Maple pour 81 points (9x9), et nous les plaçons dans un fichier au format csv ; de même, nous plaçons les valeurs obtenues grâce au maillage. De cette façon, nous pouvons traiter ces données, de nouveau grâce à un script Python.

Le calcul des différences entre les valeurs Maple et Python se fait de la manière suivante :

- Nous récupérons les données depuis les fichiers csv vers deux listes ;
- Nous divisons les listes en tranches de 9 valeurs (0..8, 9..17 .. 71..80)
- Nous calculons la différence entre les valeurs des deux tranches de listes, puis nous sommes les valeurs absolues de ces différences ;
- Nous calculons la moyenne des sommes des valeurs des deux tranches de listes ;

Nous obtenons ensuite deux valeurs :

- Le rapport entre la somme des différences et la somme des valeurs
- Le rapport entre la somme des différences et la somme des points considérés

Finalement, nous reportons ces valeurs dans un fichier csv, où nous pouvons les traiter à l'aide d'un diagramme.

3.2 Résultats et interprétation

Nous pouvons voir que les résultats obtenus avec le maillage tendent vers ceux obtenus avec Maple. Nous remarquons que la différence relative est la plus grande pour les petites valeurs, ce qui est logique, car sur des petites valeurs, l'erreur provenant de l'approximation est plus visible.

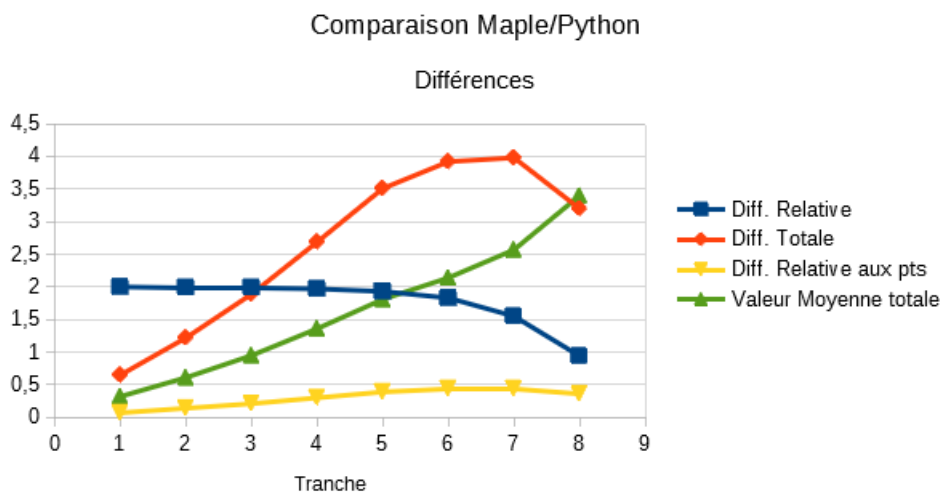


FIGURE 3.1 – Comparaison Maple Python

En effet on observe une propagation de la droite (où la barre est chauffée, et nous connaissons donc la température) vers la gauche (où la température est déduite par des récursions successives) d'une erreur visible par l'augmentation de la différence relative entre les solutions Python et Maple.

On en déduit que la méthode du maillage propage une erreur le long de ses calculs, mais que l'importance de celle-ci semble plafonner. Il s'agit donc d'une approximation fiable, et efficace, car elle demande beaucoup moins de calculs que la détermination exacte de *Maple*.

Conclusion et perspectives

Tout au long de ce projet, nous avons découvert et exploité deux approches différentes de l'équation mathématique permettant d'étudier la conduction thermique. La première, une approche analytique permet de déterminer des solutions exactes, et ainsi de déterminer la température à chaque point de la surface d'une barre de métal chauffée. La seconde, une approche discrète utilisant des développements de Young, et un schéma centré d'ordre 2 ; permettant de déterminer une approximation de ces températures, en effectuant beaucoup moins de calculs. Encore une fois, deux méthodes : le calcul exact des solutions discrètes, effectué sur Maple, et la technique du maillage, en passant par des matrices. Nous obtenons des solutions qui se ressemblent dans leur forme, et diffèrent par l'importance de l'erreur dans le modèle.

Nous obtenons une propagation de la chaleur en forme de cascade, qui correspond à ce que l'on attend des températures lorsque l'on chauffe une barre de métal d'un côté.

Pour continuer l'étude de ce thème, il serait très intéressant d'étudier l'évolution des températures en trois dimensions. On pourrait également étudier le cas stationnaire en deux dimensions, ainsi que l'étude de la convection thermique.

Bibliographie

[1] Méthode des différences finies. <https://fr.wikipedia.org/wiki/M2>

<http://www.f-legrand.fr/scidoc/docimg/numerique/diffusion/diffusion2d/diffusion2d.html>

Ce document propose une étude de la diffusion de la chaleur en régime évolutif 2D (x, y, t) . Il se base sur la discrétisation j d'une équation en utilisant un maillage et en déterminant de façon récursive les valeurs nœuds (fonction de i et j). Il prend aussi en compte les conditions limites grâce à un décalage (colonnes fictives) dans le maillage. Intéressant pour notre projet, mais dépasse un peu le cadre (évolutif).

https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_de_la_chaleur