**À rédiger pour la semaine 47**

Préparation du TP 4 « Spectre d'un signal »

# 4 Filtrage

**Semaine 47 – Séance 9**

### Exercice 13 - Filtre inductif

**Objectif :** Déterminer les propriétés d'un filtre.

Le dipôle $R$, $L$ représenté sur la figure 1 fonctionne en régime sinusoïdal forcé

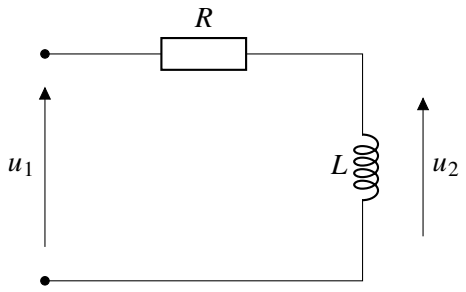



FIGURE 1 – Filtre inductif $R$-$L$.

1. Déterminer sa fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1}$ en fonction de $R$, $L$ et $\omega$. Quel est l'ordre de cet opérateur ?
2. Déterminer la bande passante à $-3$ dB de ce filtre. En déduire la nature du filtre.
3. La nature de ce filtre n'aurait-elle pas pu être identifiée plus simplement, sans calcul ?

**indications :** Lire le cours du chapitre 5 jusqu'à la page 9.

1. Passer en complexes. Possibilité d'utiliser ensuite un pont diviseur. Montrer que

$$\underline{H} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}$$

   De quel degré est le polynôme au dénominateur ?
2. Quel lien doit il y avoir par définition, entre $|\underline{H}|$ et $H_{max}$ ? Calculer le module de la fonction de transfert. Rechercher sa valeur maximale, puis déterminer la pulsation pour laquelle le gain diminue de 3 dB par rapport à ce maximum (résoudre l'inéquation). Conclure.
3. Étudier le comportement du circuit en très basses et en très hautes fréquences. Que deviennent les impédances dans ces deux situations ?

### Exercice 14 - Phénomène de résonance

**Objectif :** Mettre en évidence le lien entre le filtrage et le phénomène de résonance.

On considère l'opérateur représenté sur la figure 2. Il est constitué de composants parfaits et alimenté par une tension sinusoïdale $v_2$ de pulsation $\omega$.

La tension de sortie de l'opérateur est notée $v_3$.

1. Déterminer la fonction de transfert complexe $\underline{K}(j\omega) = \dfrac{\underline{v}_3}{\underline{v}_2}$ en fonction de $R$, $R_3$, $L$, $C$ et $\omega$.

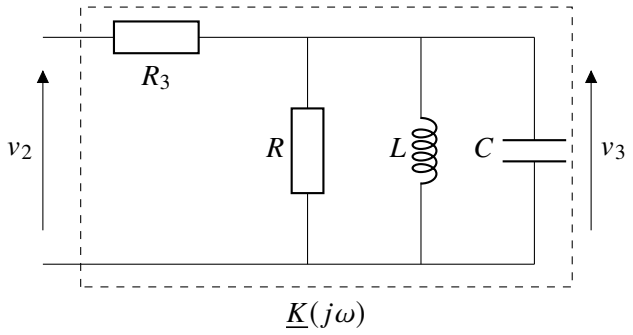



FIGURE 2 – Opérateur étudié.

**2.** Montrer que cette fonction de transfert peut se mettre sous la forme canonique :

$$\underline{K}(j\omega) = \frac{A_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

La grandeur $x$ est la pulsation réduite, $A_0$ est un réel et $Q$ est le facteur de qualité du système.

Déterminer les expressions de $A_0$, de $Q$ et de $x$. En déduire :

- l'ordre de l'opérateur ;
- la pulsation propre $\omega_0$ du système, définie par $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

**3.** Montrer que le module $|\underline{K}(j\omega)|$ passe par un maximum pour une valeur de $x$ que l'on déterminera.

On dit alors que l'opérateur est à la résonance. Préciser :

- la pulsation de résonance ;
- la valeur maximale du module de la fonction de transfert.

**4.** Tracer l'allure des variations de $|\underline{K}(j\omega)|$ en fonction de la pulsation $\omega$. En déduire la nature du filtre.

**5.** On s'intéresse à la bande passante du filtre, notée $\Delta\omega$ et exprimée en pulsations. Déterminer $\Delta\omega$ en fonction de la pulsation propre $\omega_0$ et du facteur de qualité $Q$.

*Méthode : on ne cherchera pas à déterminer séparément les deux pulsations de coupure $\omega_{c1}$ et $\omega_{c2}$, mais directement leur différence :*

$$\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}.$$

**6.** Commenter l'allure de la courbe tracée à la question **4.** en fonction des valeurs du facteur de qualité $Q$.

**indications :**

**Q1.** Identifier un circuit équivalent $R$, $L$ et $C$ et déterminer l'impédance équivalente correspondantes. Montrer que

$$\underline{K} = \frac{1}{1 + \frac{R_3}{R} + jR_3\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$$

**Q2.** Au dénominateur, factoriser par la partie réelle, puis identifier les coefficients avec la forme canonique proposée. Vérifier que $A_0$ est un réel sans dimension et que

$$Qx = R_{eq}C\omega \qquad \text{et} \qquad \frac{Q}{x} = \frac{R_{eq}}{L\omega}$$

avec $R_{eq}$ une résistance équivalente qui dépend de $R$ et $R_3$.

A l'aide d'une combinaison astucieuse des deux égalités, vérifier que $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R_{eq}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

**Q3.** Exprimer le module de la fonction de transfert à partir de sa forme canonique. Pour quelle valeur de $x$ le dénominateur est-il minimal ?

**Q4.** Étudier les limites du module lorsque $\omega \to 0$ et $\omega \to +\infty$, puis utiliser le résultat de la question précédente pour tracer l'allure de la courbe.

**Q5.** (Difficile) Aux pulsations de coupure $\omega_c 1$ et $\omega_{c2}$ le module de $\underline{K}$ vaut $\dfrac{A_0}{\sqrt{2}}$. Montrer que cette condition conduit à deux équations de la forme :

$$x - \frac{1}{x} = \pm\frac{1}{Q}.$$

Multiplier chaque équation par $x$, puis soustraire les deux équations obtenues pour les pulsations de coupure.

**Q6.** Comparer la largeur de la bande passante pour différentes valeurs de $Q$. Que se passe-t-il lorsque $Q$ augmente ou lorsque $Q$ diminue ?