TP 3 : Conditions d'optimalité

Stéphane Canu

4 octobre 2026, MLA, ITI, INSA Rouen

Le but du TP est d'étudier les conditions d'optimalité. En d'autres termes, vérifier qu'une solution proposée par un algorithme est bien la solution optimale du problème d'optimisation. Pour le faire fonctionner, vous êtes supposé avoir déjà installé CVX (que vous pourrez télécharger à cette adresse : `http://cvxr.com/cvx/`)

Pour cette exercice, nos allons reprendre les données de l'exercice de la semaine dernière : une matrice X de taille $n = 200$ individus et $p = 2n$ variables. Vous prendrez soin de centrer la matrice et de la normaliser de sorte que $\sum_{i=1}^{n} X_{ij}^2 = 1$. Un vecteur de paramètre $w_{opt} \in \mathbb{R}^p$ dont $k = 5$ seulement sont non nulles. Un vecteur de réponses $y = Xw_{opt} + \varepsilon \in \mathbb{R}^n$ où ε est un bruit Gaussien entrainant un rapport signal sur bruit de 2.

Ex. 1 — Le cas de la ridge regression

1. Résoudre à l'aide de CVX le problème de ridge régression suivant pour $t = 2.507$

$$\begin{cases} \min\limits_{\beta \in \mathbb{R}^p} & \frac{1}{2}\|X\beta - y\|^2 \\ \text{avec} & \sum\limits_{j=1}^{p} |\beta_j|^2 \leq t \end{cases} \tag{1}$$

2. Ecrire une fonction `Verifie_Ridge`(X, y, β, λ) qui permet de vérifier que cette solution est bien optimale en vérifiant les KKT du problème.

Ex. 2 — Le cas du Lasso

1. Résoudre le problème du lasso suivant pour $t = 7,28$

$$\begin{cases} \min\limits_{\beta \in \mathbb{R}^p} & \frac{1}{2}\|X\beta - y\|^2 \\ \text{avec} & \sum\limits_{j=1}^{p} |\beta_j| \leq t \end{cases} \tag{2}$$

2. Résoudre le problème du lasso suivant pour $t = 7,28$

$$\begin{cases} \min\limits_{\beta_j^+, \beta_j^- \in \mathbb{R}^p} & \frac{1}{2}\|X(\beta^+ - \beta^-) - y\|^2 \\ \text{avec} & \sum\limits_{j=1}^{p} (\beta_j^+ + \beta_j^-) \leq t \\ \text{et} & 0 \leq \beta_j^+, \beta_j^-, \qquad j = 1, \ldots, p \end{cases} \tag{3}$$

3. Ecrire une fonction `Verifie_Lasso`$(X, y, \beta, \lambda, \mu^+, \mu^-)$ qui permet de vérifier que cette solution est bien optimale en vérifiant les KKT du problème.
4. Résoudre, à l'aide de CVX, le problème dual du Lasso avec λ choisi pour obtenir les mêmes résultats que ceux du lasso primal (2).

$$\begin{cases} \min\limits_{\beta} & \frac{1}{2}\|X\beta\|^2 \\ s.t. & \|X^\top (X\beta - y)\|_\infty \leq \lambda \end{cases}$$