Chapitre 13 – Les arbres binaires

Structure arborescente.

Un arbre est un ensemble d'éléments appelés nœuds (dont un se singularise comme la racine) liés par une relation hiérarchique. Un nœud, comme tout élément d'une liste, peut-être de n'importe quel type.

Un arbre binaire est un arbre dont les noeuds possèdent au plus 2 enfants appelés fils gauche et fils droit.

Définition : arbre binaire (1/2)

- Un arbre binaire est soit un arbre vide, soit un arbre où chaque noeud a un fils gauche, un fils droit ou les 2.
- $B = \Lambda + <o, B_1, B_2>$ où B_1 et B_2 sont des arbres binaires disjoints et ‘o’ est un noeud appelé racine. B_1 est le sous-arbre gauche et B_2 est le sous-arbre droit.
  Attention ! Non symétrie gauche/droite des arbres binaires.
- On dit que C est un sous-arbre de B ssi C=B ou $C=B_1$ ou $C=B_2$ ou C est un sous-arbre de B_1 ou de B_2.
- Si un noeud n_i a pour fils gauche (ou droit) un noeud n_j, n_i est le père de n_j.
- Deux noeuds qui ont le même père sont dits frères.
- Le noeud n_i est un ascendant du noeud n_j ssi n_i est le père de n_j, ou un ascendant du père de n_j ; et n_i est un descendant de n_j ssi n_i est fils de n_j, ou n_i est un descendant d’un fils de n_j.

Définition : arbre binaire (2/2)

- Un noeud sans fils est appelé feuille. Les autres sont des noeuds internes.
- Une branche de l'arbre est tout chemin (suite de noeuds consécutifs) de la racine à une feuille. Un arbre a autant de branches que de feuilles.
- La **hauteur** d'un noeud (ou profondeur) est définie récursivement par :
  soit x noeud de B, h(x) = 0 si x est la racine de B
  h(x) = 1+ h(y) si y est le père de x.
- La hauteur d'un arbre B est h(B) = 0 si B est vide
  max {h(x), x noeud de B}
- Un arbre binaire est **entier** ssi tous ses nœuds possèdent zéro ou 2 fils.
- Un arbre binaire est **complet** ssi ses feuilles ont pour profondeur *n* ou *n-1*.
- Un arbre binaire est **parfait** ssi il est entier et toutes ses feuilles sont à la même profondeur.

TAD ArbreBinaire

Sorte : ArbreBinaire

Utilise : Noeud, Booléen, Elément

Opérations :
Créer-arbre-vide() → ArbreBinaire
Créer(Noeud, ArbreBinaire, ArbreBinaire) → ArbreBinaire
Racine(ArbreBinaire) → Noeud
Père(Noeud, ArbreBinaire) → Nœud
Fils-gauche(ArbreBinaire) → ArbreBinaire
Fils-droit(ArbreBinaire) → ArbreBinaire
Est-vide(ArbreBinaire) → Booléen
Affecter-val(Noeud, Elément) → Noeud
Val(Nœud) → Elément

Parcours en profondeur

Il suit le chemin de la branche qui part à gauche de la racine et va toujours le plus à gauche. Chaque noeud est rencontré 3 fois : à gauche, en dessous, à droite.

- ordre préfixé (préordre) : seul traitement1 est appliqué
- ordre infixé (symétrique) : seul traitement2 est appliqué
- ordre sufixé (postfixé) : seul traitement3 est appliqué

```
Procédure profGauche (E A : ArbreBinaire)
   Début
        Si est-vide(A) Alors terminaison
                       Sinon traitement1
                              profgauche(fils-gauche(A))
                             traitement2
                            profgauche(fils-droit(A))
                            traitement3
        FinSi
   Fin
```

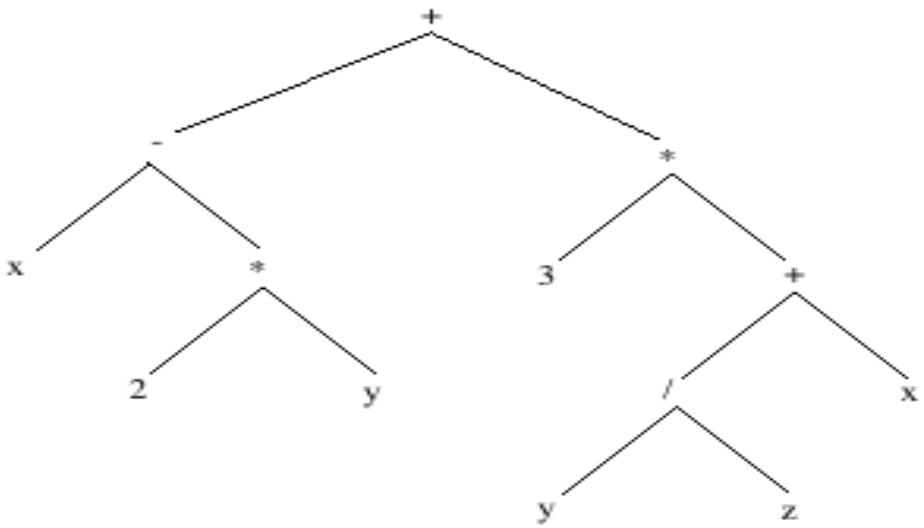
Exemple

Expression arithmétique x-2*y+3*(y/z+x)

préfixe : traitement1 = affiche(val(racine(A)) +-x*2y*3+/yzx

postfixe : traitement3 = affiche(val(racine(A)) x2y*-3yz/x+*+

infixe : traitement2 = affiche(val(racine(A)) x-2*y+3*y/z+x

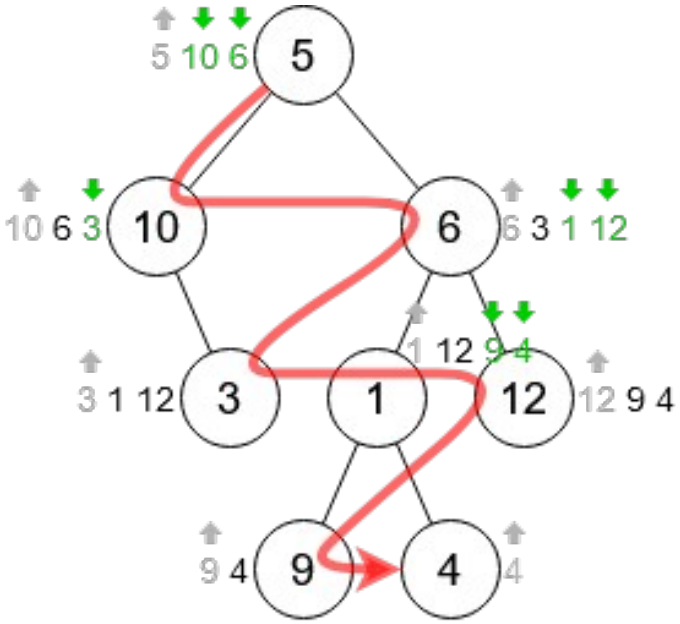


Problème de parenthèsage pour infixe

```
Procédure infixe (E A : ArbreBinaire)
Début
Si est-vide(fils-gauche(A))
          et est-vide(fils-droit(A))   {feuille(A)}
   Alors affiche(val(racine(A)))
   Sinon affiche('(')
          infixe(fils-gauche(A))
          affiche(val(racine(A)))
          infixe(fil-droit(A))
          affiche(')')
FinSi
Fin
```

Parcours en largeur

On part de la racine puis on explore ses successeurs,
puis les successeurs non explorés des successeurs, etc.



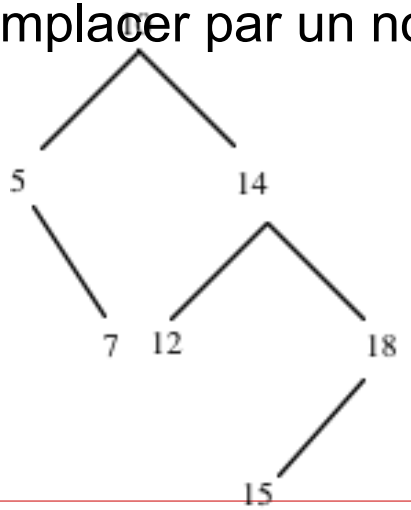
Parcours en largeur

```
Procédure parcoursLargeur(E A : ArbreBinaire)
Var f : file d'ArbreBinaire
    sa : ArbreBinaire
Début
f ← Créer-file-vide
Ajouter(f,A)
TantQue ¬est-vide(f) Faire
      sa ← premier(f)
      Retirer(f)
      Traitement % par exemple afficher la racine de sa
      Si ¬est-vide(fils-gauche(sa))
         Alors Ajouter(f,fils-gauche(sa))
      FinSi
      Si ¬est-vide(fils-droit(sa))
         Alors Ajouter(f,fils-droit(sa))
      FinSi
FinTantQue
Fin
```

Arbre Binaire de Recherche (ABR)

- Propriété : dans un ABR, le sous-arbre gauche (resp. droit) du noeud x ne contient que des éléments de valeur inférieure (resp. supérieure) à celle de l'élément en x.
- Le test d'appartenance à l'ensemble des éléments de l'arbre est aisé.

- Pour l'insertion, on cherche à positionner x en attendant de rencontrer un noeud vide dans la descente pour le remplacer par un noeud contenant x.



Appartient

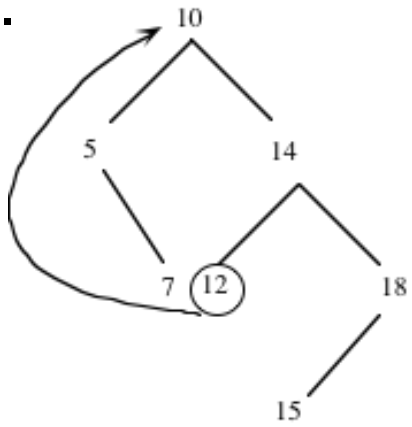
```
Fonction appartient (x : élément, A : arbrebin): booléen
Var app : booléen
Début
Si est-vide(A)
   Alors app ← faux
   Sinon Si x=val(racine(A))
           Alors app ← vrai
           Sinon Si x<val(racine(A))
                          Alors app ← appartient(x,fils-gauche(A))
                          Sinon app ← appartient(x,fils-droit(A))
                 FinSi
         FinSi
FinSi
retourne(app)
Fin
```

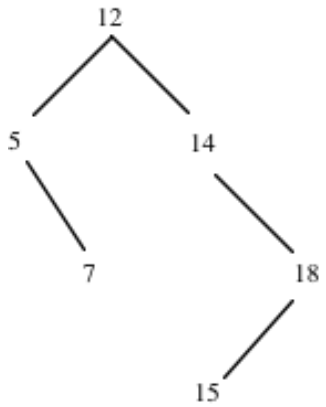
Insérer

```
Procédure insérer (E x : élément, E/S A : arbrebin)
Début
Si est-vide(A)
    Alors affecter-val(racine(A),x)
             fils-gauche(A) ← créer-arbre-vide
             fils-droit(A) ← créer-arbre-vide
    Sinon Si x<val(racine(A))
                 Alors insérer(x,fils-gauche(A))
                 Sinon Si x>val(racine(A))
                          Alors insérer(x,fils-droit(A))
                       FinSi
              FinSi
FinSi
Fin
```

Supprimer

- La suppression pose de petits problèmes.
- Il faut chercher le plus petit élément de l'arbre plus grand que l'élément à supprimer (ici, on supprime 10 donc la ppe est 12). Et on remplace l'élément à supprimer par le ppe.
- Besoin d'une procédure supprimin qui retire le ppe et retourne sa valeur.





Supprimin

```
Procédure supprimin (E/S A : arbrebin, S e : élément)
Début
Si est-vide(fils-gauche(A))
    Alors e ← val(racine(A))
                A ← fils-droit(A)
    Sinon supprimin(fils-gauche(A),e)
FinSi
Fin
```

```
Procédure supprimer (E x : élément, E/S A : arbrebin)
Début
Si ¬est-vide(A)
  Alors Si x<val(racine(A))
          Alors supprimer(x,fils-gauche(A))
          Sinon Si x>val(racine(A))
                  Alors supprimer(x,fils-droit(A))
                  Sinon Si est-vide(fils-gauche(A))
                             et est-vide(fils-droit(A))  {feuille(A)}
                             Alors A←créer-arbre-vide
                             Sinon Si est-vide(fils-gauche(A))
                                      Alors A←fils-droit(A)
                                      Sinon Si est-vide(fils-droit(A))
                                               Alors A←fils-gauche(A)
                                               Sinon supprimin(fils-droit(A),e)
                                                     affecter-val(racine(A,e)
                                           FinSi
                                  FinSi
                           FinSi
                  FinSi
          FinSi
FinSi
Fin
```