

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Aucun document n'est autorisé.

Merci d'éteindre et de ranger les téléphones portables ainsi que les montres connectées.

Exercice 1 : Questions de cours pour se chauffer

1. Rappeler le principe fondamental de la statique des fluides.

1 pt

$$\vec{F}_v = \overrightarrow{\text{grad}}(P) \text{ ou } \rho \vec{f}_v = \overrightarrow{\text{grad}}(P).$$

2. En partant de cette expression, montrer, en détaillant votre démonstration et en listant les hypothèses de travail, comment arriver à la relation $\mathbf{P} + \rho \mathbf{g}z = C^{st}$.

2 pts

Si les forces de volume se réduisent au poids, celui-ci dérivant d'un potentiel (force conservative) alors $\vec{f}_v = -\overrightarrow{\text{grad}}(gz)$. On a donc $-\rho \overrightarrow{\text{grad}}(gz) = \overrightarrow{\text{grad}}(P)$. En faisant l'hypothèse d'un fluide incompressible, on trouve $\overrightarrow{\text{grad}}(P + \rho gz) = \vec{0}$. Pour que le gradient soit uniformément nul, il faut que $\mathbf{P} + \rho \mathbf{g}z = C^{st}$

1 pt

3. Que mesure un manomètre ?

L'écart à la pression atmosphérique.

4. Comment convertir des millimètres de mercure (mmHg) en pascals (Pa)

1 pt

$$P_{\text{mano}} = \rho g z = \rho_{\text{Hg}} g z_{\text{Hg}}$$

Il convient donc de multiplier la hauteur par $\rho_{\text{Hg}} g$

Exercice 2 : Étudions un écoulement

Certaines questions sont en cascade. Cependant, la notation considèrera la méthodologie et l'énoncé de formules et définitions.

On considère un écoulement plan d'un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ . L'écoulement se développe dans le plan horizontal (O, x, y) avec $x > 0$ et $y > 0$. Cet écoulement est borné par deux parois rigides, l'une située en $y=0$ et l'autre étant une paroi convergente, correspondant à une ligne de courant que l'on déterminera plus loin. Le champ des vitesses est défini par:

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \frac{U_0 x}{L} \\ \frac{U_0 y}{L} \\ 0 \end{pmatrix}$$

U_0 est une vitesse de référence, L une longueur caractéristique.

1. S'agit-il d'un champ Eulérien des vitesses ? Justifier votre réponse?

0.5 pt

Oui, il est décrit en tout point et à tout instant.

2. L'écoulement est-il stationnaire ? Justifier votre réponse.

0.5 pt

1 pts

Oui, il ne dépend pas explicitement du temps.

3. Montrer par un calcul, en vous justifiant, que cet écoulement conserve la masse.

L'équation de conservation de la masse pour un fluide incompressible correspond à $\text{div}(\vec{U}) = 0$. C'est bien respecté ici.

4. Montrer que l'écoulement est irrotationnel.

0.5 pt

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{U}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_0 \frac{x}{L} & U_0 \frac{y}{L} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

5. Étude cinématique de l'écoulement :

- a. Déterminer l'équation cartésienne de la famille des lignes de courant de cet écoulement.

2 pts

On détermine les lignes de courant en intégrant l'égalité $\frac{dx}{U_x} = \frac{dy}{U_y}$

Ici, cela conduit à $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$ et après intégration à $xy = C$

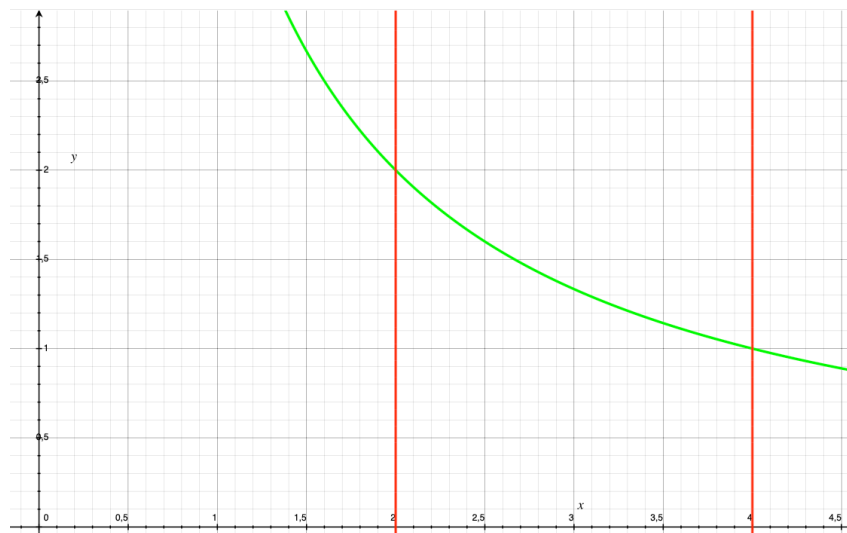
- b. En déduire la fonction $y = f(x)$ décrivant le profil géométrique de la paroi convergente délimité par la ligne de courant passant par le point A de coordonnées (L, L) .

1 pt

En A on a $L^2 = C$ et donc $y = \frac{L^2}{x}$.

- c. Tracer $y = f(x)$ dans la figure ci-dessous pour x compris entre L et $2L$ (traits verticaux avec $L=2$).

1 pt



- d. Calculer le débit volumique Q_{v1} (en valeur absolue) traversant la section verticale d'entrée S_1 située en $x = L$, s'étendant de la paroi rigide inférieure $y = 0$ jusqu'à la ligne de courant supérieure passant par A (soit $y = L$, correspondant à la paroi convergente), pour une profondeur h selon l'axe z .

2 pts

$$Q_{v1} = \iint \vec{U} \cdot \vec{n} \, ds = \iint \frac{U_0 x}{L} \, ds = \frac{U_0 L}{L} \int_0^{f(1)} dy \int_0^h dz = U_0 f(1) = U_0 L h$$

- e. Calculer le débit volumique Q_{v2} traversant la section S_2 , également verticale, de même profondeur h mais située en $x=2L$.

1 pt

$$Q_{v2} = \iint \vec{U} \cdot \vec{n} \, ds = \iint \frac{U_0 x}{L} \, ds = \frac{U_0 2L}{L} \int_0^{f(2)} dy \int_0^h dz = 2U_0 f(2)h = U_0 L h$$

1 pt

- f. Comparer les deux débits, commenter.

Les deux débits sont égaux car le fluide est incompressible ($P_{\text{red}} = E_{\text{ch}} + S_{\text{teek}}$).

Pour rappel, l'équation de Bernoulli indique que :

$$P + \frac{\rho}{2} V^2 + \rho g y = D$$

6. Rappeler les hypothèses de validité de cette équation.

2 pts

Valable le long d'une ligne de courant pour un fluide parfait, incompressible, stationnaire et soumis à la pesanteur

Vous admettez (abordé oralement en cours) que pour un écoulement irrotationnel, la constante D est uniforme (et non uniquement constante le long d'une ligne de courant).

7. Exprimer le champ de pression stationnaire $P(x, y)$ en tout point du domaine en fonction de P_0 , ρ , U_0 , L , x et y en supposant que les forces de volume (gravité) sont négligeables dans le plan de l'écoulement et que la pression au point d'entrée de coordonnées $(L, 0)$ est égale à P_0 .

1 pt

Sans la pesanteur :

$$P(x, y) + \frac{\rho}{2} V^2 = D$$

En exprimant la norme de la vitesse on trouve :

$$P(x, y) + \frac{\rho}{2} \left(\frac{U_0}{L} \right)^2 (x^2 + y^2) = D$$

On détermine la constante D en se plaçant en $(L, 0)$:

$$P_0 + \frac{\rho}{2} U_0^2 = D$$

Ainsi, on trouve

2 pts

$$P(x, y) = P_0 + \frac{\rho}{2} U_0^2 \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left(\frac{y}{L} \right)^2 \right]$$

8. Dans ce type d'écoulement, dire si l'écoulement peut induire une composante tangentielle des contraintes.

0.5 pt

Le fluide étant parfait (sans viscosité), il n'y a que des composantes normales.

9. On s'intéresse à la force de pression exercée par le fluide sur la portion de la paroi plane inférieure située sur l'axe $y = 0$, entre $x = L$ et $x = 2L$. Rappeler la formulation permettant ce calcul et, utiliser la pour déterminer la résultante des forces de pression $\vec{F}_p$ exercée sur cette paroi (pour une profondeur

unitaire $h = 1$). Commenter et discuter ce résultat en comparaison de la résultante qui s'exerce en absence d'écoulement.

1 pt

$$\vec{F}_p = \iint -P \vec{n} ds$$

Sur la paroi inférieure on a

$$\vec{F}_p = \iint -P(x, 0) \vec{U}_y dx dz$$

$$\vec{F}_p = -\vec{U}_y \int_L^{2L} \left(P_0 + \frac{\rho}{2} U_0^2 \left[1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \right) dx \int_0^1 dz$$

$$\vec{F}_p = -\vec{U}_y \left[P_0 L + \frac{\rho}{2} U_0^2 \left(L - \frac{1}{L^2} \frac{(2L)^3 - L^3}{3} \right) \right]$$

$$\vec{F}_p = -\vec{U}_y \left[P_0 L + \frac{\rho}{2} U_0^2 \left(L - \frac{7L}{3} \right) \right]$$

2 pts

$$\vec{F}_p = -L \left[P_0 - \frac{2\rho}{3} U_0^2 \right] \vec{U}_y$$

1 pt

La pression exercée par le fluide sur la paroi inférieure est verticale orientée vers le bas. Cette force est plus faible que celle qui s'exerce en absence d'écoulement $U_0 = 0$.