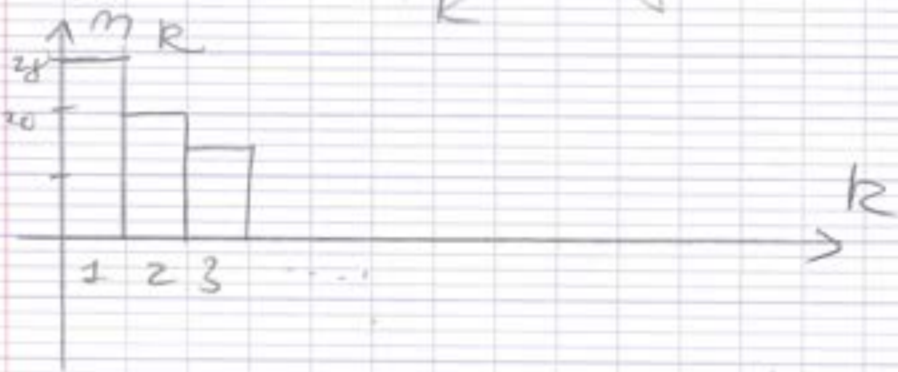
STat Examen 2020-2021

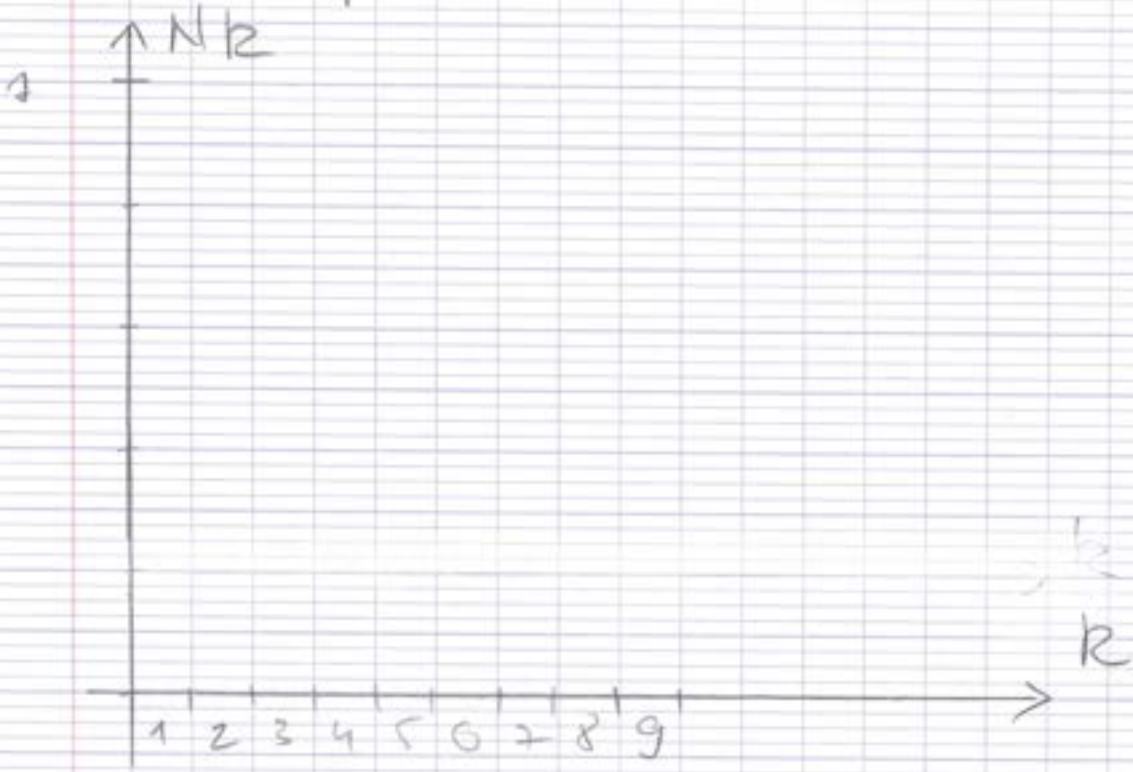
1.1) Classes d'amplitudes égales

histo : n_k en fonc. de k



fonc. de répartition.

N_k en fonc. de k et puis interpolation linéaire



1.2) Le Mode = classe 1

Médiane à obtenir par interpolation : $\in (2250 ; 2750)$

$$Me = 2250 + \frac{2750 - 2250}{62 - 48} \times (50 - 48) =$$

$=$

$$Moy\_emp = \sum_{k=1}^{9} n_k \times c_k = \dots$$

La médiane est plus robuste que le mode et la moy. emp.

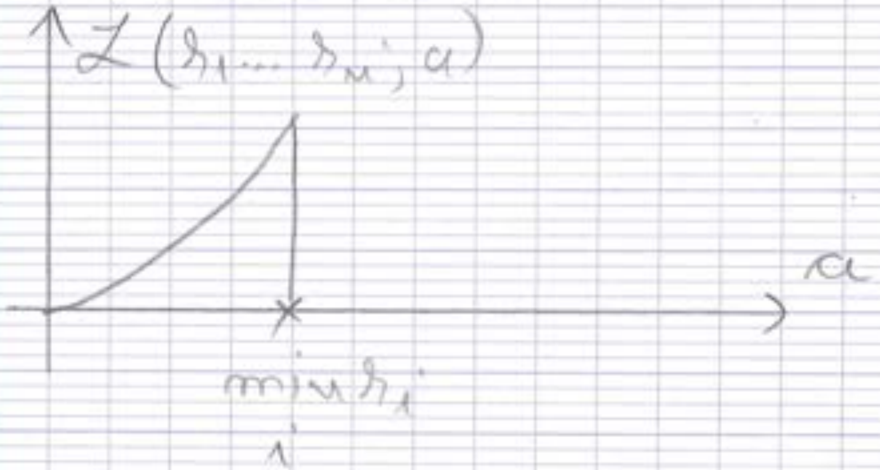
1.3) $$f_R(x) = \begin{cases} \dfrac{b a^b}{x^{b+1}}, & \text{si } x \geq a \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour b fixé :

$$\mathcal{L}(x_1 \dots x_n ; a) = \prod_{i=1}^{n} \frac{b a^b}{x_i^{b+1}} =$$

$$= \frac{b^n a^{nb}}{\prod_i r_i^{b+1}}, \text{ si } a \le r_i \ \forall r_i > 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a \le \min_i r_i}$$



$\mathcal{L}(\dots)$ est max pour $a = \min_i r_i$

$\hat{a}_{MV} = \min_i r_i$ estimateur MV.

Il n'est pas efficace car le support de la loi dépend de a.

a_{MV} = salaire minimum.

$$= \frac{1250 + 1750}{2} = c_1 = 1500 \text{ euro.}$$

1.4) $a = 1500$ fixé

$$\mathcal{L}(r_1, \dots r_n ; b) = \frac{b^n a^{nb}}{\prod_i r_i^{b+1}}$$

$$\ln \mathcal{L}(\dots) = n \ln b + nb \ln a - (b+1) \sum_i \ln r_i$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\dots)}{\partial b} = \frac{n}{b} + n \ln a - \sum_i \ln r_i = 0$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_i \ln r_i - \frac{\cancel{n}\ln a}{\cancel{n}}} =$$

$$= \dots = 3{,}5$$

1.5) $\frac{2nb}{\hat{b}} \sim \chi^2_{2n}$

$$1-\alpha = P\left(\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{2nb}{\hat{b}} \leq \chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{200;0{,}025} =$$

$$\chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{200;0,975} =$$

$$= \frac{\left(n_{0,975} + \sqrt{200-1}\right)^2}{2} =$$

$$= \dots$$

$$\hat{b} \cdot \frac{\chi^2_{2n;\frac{\alpha}{2}}}{2n} \leq b \leq \hat{b} \cdot \frac{\chi^2_{2n;1-\frac{\alpha}{2}}}{2n}$$

Ex2)

2.1) $S^2_E = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{2} n_r \cdot (\bar{y}_r - \bar{y})^2 =$

$$= \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y})^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y})^2}{2} = \dots$$

$n = 2 \cdot n_r$

$$S_{\frac{R}{E}} = \sqrt{\frac{S^2_E}{S^2_R}}$$

$S^2_R = \ldots$

2,2) Test du signe → il faut éliminer la paire (2930-2930)

$n = 7 \Rightarrow n = 6$.

$D = X - Y$

Z = v.a. comptant combien de fois $Z > 0$

$Z = B(n = 6, p = p_0 = 0.5)$ ss. H_0

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 = 0,5 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$$

$W : Z > A$

$\alpha = P(Z > A \mid H_0) = 1 - P(Z \leq A \mid H_0)$

$P(Z \leq A \mid H_0) = 1-\alpha$

A = fractile de la loi $B(n=6, p=0,5)$
d'ordre $1-\alpha = 0,95$

$A_{n=5} = 4,\ldots$

$A_{n=10} = 7,5$

$\Rightarrow W : Z \geq 5$

$z = 4 \notin W$

$\Rightarrow$ on garde H_0 → ni solaire avant et après l'événement

Ex3)

3.1) $p_\tau = \int_0^\tau \frac{1}{\mu} e^{-t/\mu} dt = 1 - e^{-\tau/\mu}$

3.2) $X \sim B(n = 225 ; p_\tau)$

3.3) $\begin{cases} H_0 : p \geq p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases}$

A

$p_0 = 1 - e^{-500/140} = 1 - e^{-500/750} =$
$= 0,486.$

3.4) Si RV monotone $\Rightarrow$
test UPP et Règle décision

$W : \hat{p}_n < A$

$M_{th} = M_{emp}$

$E(X) = \overline{X}$

$np = \overline{X}$ mais échantillon
contenant 1 seule
loi binomiale $\Rightarrow \overline{X} = X$

$$\boxed{\hat{p}_n = \frac{X}{n}}$$

$W : \frac{X}{n} < A \Leftrightarrow \underline{\underline{X < B}}$

$$\alpha^* = P(X < B \mid p = p_0)$$

$$X \xrightarrow[n \to \infty]{p = p_0 \text{ ss. } H_0} N(\mu_X = np_0 ; \sigma_X^2 = np_0(1-p_0))$$

$$\alpha^* = P\Big(\underbrace{\frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}}_{N(0,1)} < \underbrace{\frac{B - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}}_{m_{\alpha^*} = -m_{1-\alpha^*}} \,\Big|\, p = p_0\Big)$$

$$B = np_0 - m_{1-\alpha^*}\sqrt{np_0(1-p_0)} =$$

$$= 97{,}15.$$

$W : X < 97{,}15$

$p_1 = 1 - e^{-500/812} = \ldots$

$x_1 = B(n = 225 ; p_1) = \ldots \overset{?}{\in} W$

décider.

$$B(n = 225 ; p_1) \underset{n \to \infty}{\sim} N(np_1 ; np_1(1-p_1))$$

3.6)

$$1-\beta = P(X < B \mid p = p_1) =$$

$$= P\left(X < np_0 - n_{1-\alpha^*}\sqrt{np_0(1-p_0)} \mid p = p_1 \right)$$

$$= P\left(\underbrace{\frac{X - np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}}_{N(0,1)} < \underbrace{\frac{n(p_0-p_1) - n_{1-\alpha^*}\sqrt{np_0(1-p_0)}}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}}_{n_{1-\beta}} \right)$$

$$1-\beta = \phi\left(\frac{\sqrt{n}(p_0-p_1) - \sqrt{p_0(1-p_0)} \cdot n_{1-\alpha^*}}{\sqrt{p_1(1-p_1)}} \right)$$

$$p_1 = 1 - e^{-500/300} = 0{,}4262$$

$$1-\beta = \phi(1{,}657) = 0{,}57.$$

puissance moyenne

alors que UPP.

Ex4)

4.1) Simulation cas de du rité
→ comparer les tests stat.
lorsque on a besoin de
données avec vérité terrain.

À partir de la fonc
rand (...) → la uniforme.

4.2) La Pareto : la 20% 80%

Ex : 80% des richesses
détenues par 20% des personnes