

Les calculatrices sont autorisées. Aucun document n'est autorisé.

Merci d'éteindre et de ranger les téléphones portables ainsi que les montres connectées.

Les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1 : Température (10 points)

Un satellite sphérique métallique de conductivité thermique k , de rayon intérieur R_{int} et extérieur R_{ext} orbite à la distance r du Soleil. Étant dans l'espace, ce dernier n'échange avec l'extérieur que par rayonnement. A l'intérieur, en revanche, puisque le satellite contient de l'air, il n'échange que par convection (le rayonnement émit à l'intérieur est à tout instant réabsorbé par la surface intérieure). Afin de le rendre habitable, on souhaite maintenir la température de l'air intérieur à T_{amb} . Pour cela, une climatisation régule la température et le but de cet exercice est d'évaluer la consommation électrique P (kW) de ce dispositif de chauffage ou de refroidissement. L'ensemble de l'exercice se traite à l'état stationnaire. La puissance P traverse ainsi la coque métallique pour se perdre dans l'espace par rayonnement. On notera T_{int} la température de la paroi à l'intérieur du satellite et T_{ext} sa température de surface extérieure. La surface extérieure du satellite a une émissivité ε , égale à son absorptivité.

On rappelle que la surface d'une sphère est $4\pi r^2$ alors que celle d'un disque est πr^2 .

On notera h le coefficient d'échange convectif intérieur au satellite.

2 pts

1. Faites un bilan thermique dans l'air contenu dans la capsule sphérique. On exprimera ainsi $T_{amb} - T_{int}$ en fonction h , P et R_{int} . Vous pourrez en déduire l'expression d'une résistance convective en coordonnées sphériques.

Terme de production : l'air est chauffé ($P > 0$) ou refroidi ($P < 0$) à l'aide de la climatisation.

Terme d'échanges $\phi_{éch} = h(T_{amb} - T_{int})4\pi R_{int}^2$ (positif si le flux est sortant).

Pas de terme de stockage car problème à l'équilibre thermique.

Ainsi, on a $P = E_{éch} = h(T_{amb} - T_{int})4\pi R_{int}^2$ et donc $T_{amb} - T_{int} = \frac{P}{4\pi h R_{int}^2} = R_{conv}P$ et

donc $R_{conv} = \frac{1}{4\pi h R_{int}^2}$.

2. Rappelez sans justification l'équation de la chaleur dans un matériau conducteur et montrer, en vous justifiant, que le profil de température dans la paroi métallique vérifie $\Delta T = 0$.

Un bilan thermique dans un matériau conducteur revient à résoudre l'équation de la chaleur $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{p}{\rho C_p} + D\Delta T$. En régime permanent et sans sources de chaleur au sein de la coque, on arrive bien à $\Delta T = 0$.

1 pt

3. Ce résultat mène, après quelques calculs non demandés ici, à la détermination d'une résistance thermique conductive $R_{cond} = \frac{1}{R_{int}} - \frac{1}{R_{ext}} = \frac{1}{4\pi k}$. En déduite une expression de $T_{int} - T_{ext}$ en fonction de R_{cond} et P .

1 pt

Avec l'analogie électrique on a $T_{int} - T_{ext} = R_{cond}P$ avec P la puissance thermique traversant le métal.

4. Par sa surface extérieure, le satellite échange par émission thermique (sur toute sa surface) et par absorption du rayonnement solaire $E(r)$ (sur la surface exposée au Soleil, égale au disque apparent depuis le soleil). La différence de ces deux flux doit correspondre à la puissance thermique traversant le métal. En déduire une expression de T_{ext} de la forme

$$T_{ext} = \sqrt[4]{\frac{C+P}{D}} \text{ avec } C \text{ et } D \text{ que vous exprimerez en fonction de } \varepsilon, \sigma, R_{ext} \text{ et } E(r).$$

$$P = \underbrace{\varepsilon\sigma T_{ext}^4 4\pi R_{ext}^2}_{\text{émission}} - \underbrace{\varepsilon E(r)\pi R_{ext}^2}_{\text{absorption}}$$

$$T_{ext} = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon E(r)\pi R_{ext}^2 + P}{\varepsilon\sigma 4\pi R_{ext}^2}}$$

Ainsi $C = \varepsilon E(r)\pi R_{ext}^2$ et $D = \varepsilon\sigma 4\pi R_{ext}^2$

2 pts

5. Reprendre les résultats obtenus aux questions 1 et 3 de façon à exprimer P en fonction des données de R_{conv} , R_{cond} , T_{amb} et T_{ext} .

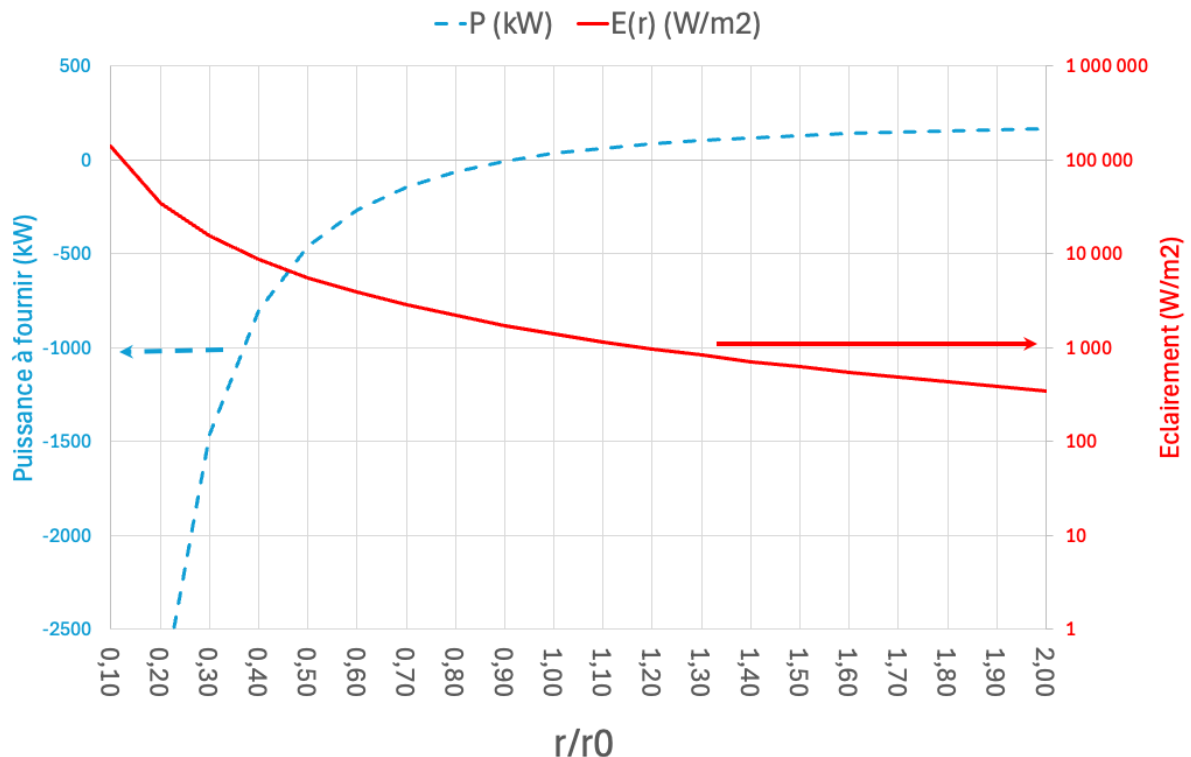
1 pt

La soustraction des résultats obtenus aux questions 1 : $T_{amb} - T_{int} = R_{conv}P$

et 3 : $T_{int} - T_{ext} = R_{cond}P$

Donne $P = \frac{T_{amb} - T_{ext}}{R_{conv} + R_{cond}}$

6. En exprimant l'éclairement solaire perçu par le satellite en fonction de la distance qui le sépare du soleil $E(r) = E_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2$ avec $E_0 = 1400 \text{ W.m}^{-2}$ et $r_0 = 150 \times 10^6 \text{ km}$ (la distance Terre-Soleil) et en prenant $k = 185 \text{ W.m}^{-1}.K^{-1}$, $R_{int} = 10 \text{ m}$, $R_{ext} = 10.05 \text{ m}$, $T_{amb} = 20^\circ\text{C}$ et $\varepsilon = 0.5$, on obtient, à l'aide des équations précédentes, le résultat ci-dessous. Proposer une méthodologie permettant d'obtenir ces résultats et commenter les.



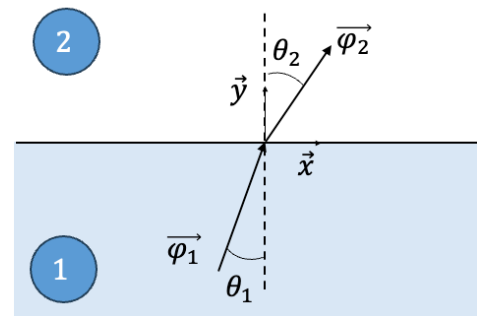
On a obtenu la courbe en cherchant T_{ext} qui donne $\underbrace{\varepsilon \sigma T_{ext}^4 4\pi R_{ext}^2}_{\text{émission}} - \underbrace{\varepsilon E(r) \pi R_{ext}^2}_{\text{absorption}} = \underbrace{\frac{T_{amb}-T_{ext}}{R_{conv}+R_{cond}}}_P$ pour différentes distances du soleil (méthode graphique ou solveur numérique).

3 pts

On en déduit ensuite la puissance avec $P = \frac{T_{amb}-T_{ext}}{R_{conv}+R_{cond}}$. Les abscisses représentent la distance du soleil divisée par la distance terre-soleil. Si ce rapport est supérieur à 1 le satellite est plus éloigné du Soleil que la Terre et inversement. Au niveau de la Terre, on retrouve bien un éclaircissement de l'ordre de 1000 W/m². Pour être à 20°C sans avoir à fournir d'énergie, il faut se placer en $r = 0,9 \times r_0$ soit plus proche du soleil mais pas trop non plus... Dès que l'on s'éloigne de cette position, la puissance nécessaire pour maintenir le satellite à 20°C évolue très vite, en particulier si on s'approche du Soleil, avec des valeurs négatives indiquant que le dispositif pompe la chaleur. Par exemple, à mi-chemin du soleil, la puissance nécessaire pour maintenir la cabine à 20°C atteint 500 kW! Étrangement, la puissance nécessaire pour chauffer la cabine pour $r > r_0$ semble évoluer plus lentement et tendre vers un plateau correspondant à P inférieur à 200 kW.

Exercice 2 : Une certaine analogie avec les lois de la réfraction (11 points)

Soit 2 blocs solides conducteurs aux propriétés physiques uniformes (conductivités thermiques k_1 et k_2) sans sources de chaleur (passifs). Ces deux blocs, sont mis en contact le long d'une surface (correspondant à $y=0$ sur la figure) et sont parcourus par un flux thermique stationnaire.



1 pt

1. Sachant que, dans chaque matériau $\Delta T = 0$, montrer qu'un champ de température de la forme $T_i(x, y, z) = b_i x + c_i y + d_i z + e_i$ est physiquement possible à l'équilibre.

Oui cette solution convient car elle respecte $\Delta T_i = 0$

2. Exprimer le vecteur densité de flux conductif au sein des deux matériaux et simplifier l'expression de $T_i(x, y, z)$, en vous justifiant, sachant que les échanges sont négligeables dans la direction z .

$$\vec{\varphi}_i = -k_i \vec{\nabla}(T_i)$$

Si les échanges ne se font que suivant x et y alors $\vec{\varphi}$ n'a pas de composante suivant z , ce qui implique que $\frac{dT}{dz} = 0$ et donc que $d_i = 0$ et ainsi que $T_i(x, y, z) = b_i x + c_i y + e_i$.

1 pt

3. Donner l'expression générale puis réduite du flux conductif $d\Phi_1$ quittant le bloc 1 au niveau de l'interface ($y=0$) sur une surface élémentaire ds centrée en (x, z) quelconques. Votre résultat réduit devrait faire apparaître au moins une des constantes b_1, c_1, d_1, e_1 .

1 pt

$$d\Phi_1 = -k_1 \vec{\nabla}(T_1) \cdot \vec{y} ds = -k_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} ds = -k_1 c_1 dx dz$$

4. En faire de même avec le flux $d\Phi_2$ pénétrant le bloc 2 au même endroit.

1 pt

$$d\Phi_2 = -k_2 \vec{\nabla}(T_2) \cdot \vec{y} ds = -k_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} ds = -k_2 c_2 dx dz$$

5. Que dire de ces deux flux élémentaires à l'équilibre thermodynamique ? En conclure que

$$c_2 = \frac{c_1 k_1}{k_2}.$$

1 pt

A l'équilibre (sans stockage), le flux perdu par le bloc 1 doit être reçu par le bloc 2. On en conclut que $k_1 c_1 = k_2 c_2$.

2 pts

6. Par ailleurs, le champ de température doit rester continu à l'interface, quelle que soit la position (x, z) . Qu'en conclure sur les constantes b_i et e_i ?

$T_1(x, y = 0, z) = T_2(x, y = 0, z)$ et donc $b_1 x + e_1 = b_2 x + e_2$. Cela implique que $(b_1 - b_2)x = e_2 - e_1$ et ce quel que soit x . Cela implique que $b_1 = b_2$ et donc que $e_1 = e_2$.

On déduit normalement des questions précédentes que : $T_1(x, y, z) = b_1 x + c_1 y + e_1$ et que $T_2(x, y, z) = b_1 x + \frac{c_1 k_1}{k_2} y + e_1$

7. Exprimer $\tan(\theta_1)$ avec θ_1 l'angle formé entre la normale à l'interface et le vecteur densité de flux dans le matériau 1 ainsi que $\tan(\theta_2)$ avec θ_2 l'angle que forme la densité de flux dans le matériau 2 avec la normale à l'interface en fonction des coefficients de conductivités thermiques et en fonction des coefficients b_1 et c_1 .

$$\vec{\varphi}_2 = -k_2 \underbrace{\frac{\partial T_2}{\partial x}}_{b_1} \vec{x} - k_2 \underbrace{\frac{\partial T_2}{\partial y}}_{\frac{c_1 k_1}{k_2}} \vec{y}, \text{ on a donc } \tan(\theta_2) = \frac{-k_2 b_1}{-k_2 \frac{c_1 k_1}{k_2}} = \frac{k_2 b_1}{k_1 c_1} \text{ et}$$

1 pt

$$\vec{\varphi}_1 = -k_1 \underbrace{\frac{\partial T_1}{\partial x}}_{b_1} \vec{x} - k_1 \underbrace{\frac{\partial T_1}{\partial y}}_{c_1} \vec{y}, \text{ on a donc } \tan(\theta_1) = \frac{-k_1 b_1}{-k_1 c_1} = \frac{b_1}{c_1}$$

8. En déduire une loi de la forme $n_1 \tan(\theta_1) = n_2 \tan(\theta_2)$ où vous explicitez n_1 et n_2 et commenter ce résultat en le comparant à la loi de Snell-Descartes.

On isole b_1 des deux équations précédentes $b_1 = \frac{k_1}{k_2} c_1 \tan(\theta_2) = c_1 \tan(\theta_1)$

2 pts

c_1 se simplifie et on obtient $k_2 \tan(\theta_1) = k_1 \tan(\theta_2)$. On obtient une loi similaire à celle de Snell-Descartes qui décrit la réfraction d'un rayon lumineux passant d'un milieu d'indice n_1 à un autre d'indice n_2 mais ici, c'est la conductivité thermique qui pilote la réfraction. Cependant, il ne s'agit pas d'un rayon lumineux mais d'un flux thermique. Enfin, par rapport à la loi de la réfraction, il y a inversion des indices et ce n'est pas le sinus qui est utilisé ici mais la tangente de l'angle formé par rapport à la normale.

Ce phénomène montre que lorsqu'un front thermique traverse un milieu de conductivité thermique variable, le flux peut se courber tels les rayons lumineux traversant un milieu siège d'un gradient d'indice (effet mirage). On peut ainsi créer des matériaux permettant de focaliser « la chaleur » comme une loupe le fait avec les rayons lumineux ou la faire diverger. La divergence du flux thermique permet, par exemple, d'améliorer les échanges thermiques pour le refroidissement de puces de puissance en silicium.