TD N° 6 — Estimateurs & Echantillonnage

Exercice 1 : Echantillons

On cherche à comparer deux types d'ampoules (A & B), dont la durée de vie suit une loi normale avec les paramètres suivants :

Type	μ	σ
A	1400h	200h
B	1200h	100h

$n = n_A = n_B = 125$.

Calculez la probabilité des évenements suivants :

1) La durée de vie moyenne des ampoules A est supérieur de plus de 160 heures à celle des ampoules B.
2) La durée de vie moyenne des ampoules B est supérieur ou égale à celle des ampoules A.

Exercice 2 : Estimateurs

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon d'une loi normale de moyenne θ et de variance $\theta(1-\theta)$ où $\theta \in \left]0,\, 1\right[$ est un paramètre inconnu. On considère les estimateurs de θ :

$$T_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

$$T_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

1) Montrer que T_1 et T_2 sont sans biais et convergents.
2) Quel estimateur a-t-on intérêt à choisir ? Justifier votre réponse !

N.B. : On donne $\mathrm{Var}(X_i^2) = 2\theta^2(1-\theta^2)$.

Exercice 3 : Statistiques exhaustives

Démontrer que chacune des statistiques suivantes est exhaustive :

1) $T = \sum_{i=1}^{N} X_i$ pour p paramètre inconnu de la loi de *Bernouli*.
2) $T = \sum_{i=1}^{N} X_i$ pour θ paramètre inconnu de la loi exponentielle.
3) $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ est pour μ paramètre inconnu de la loi normale (σ^2 connue).
4) $S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu)$ pour σ^2 paramètre inconnu de la loi normale (μ connue).