NOM : .... **Prénom :** .... **Groupe :** .....

D.S. de P3 du jeudi 15 Janvier 2026
Durée : 2h

INSCRIRE SON NOM, PRENOM, GROUPE EN HAUT DE CHAQUE FEUILLE
Une calculatrice non programmable, non graphique est autorisée.
Pour les élèves internationaux, les dictionnaires en papier non-annotés sont autorisés.
Les téléphones portables et montres connectées doivent être éteints et rangés dans les sacs.

TOUTE APPLICATION NUMERIQUE EST PRECEDEE D'UN CALCUL LITTERAL
ET COMPORTE UNE UNITE.

Exercice 1 : Caractéristiques d'un filtre - Application

Partie A : Etude du filtre

On étudie dans cet exercice le filtre ci-dessous :

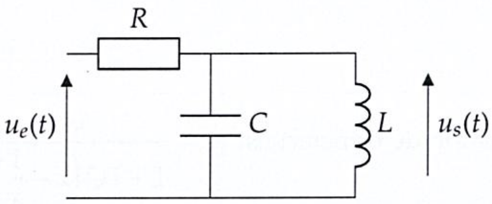
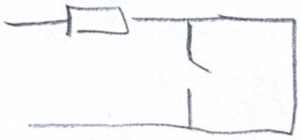


Figure 1

Dans la partie A, on se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.

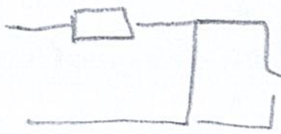
1) Avec une analyse qualitative, déterminer la nature de ce filtre.

* Basses Fréquences $\omega \to 0$



$\uparrow u_s = 0$

* Hautes Fréquences $\omega \to +\infty$

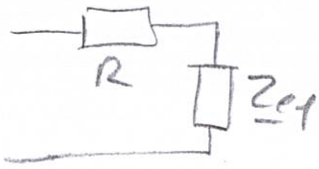


$\uparrow u_s = 0$

Le filtre annulant les signaux de hautes et basses fréquences $\Rightarrow$ c'est un filtre passe-bande.

NOM : .... **Prénom :** .... **Groupe :** .....

2) Déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ de ce filtre. Préciser l'ordre du filtre.



$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega}$$

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$$

Pont diviseur de tension

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{R + \underline{Z}_{eq}} = \frac{jL\omega / 1 - LC\omega^2}{R + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}} = \frac{jL\omega}{R - RLC\omega^2 + jL\omega}$$

Polynôme de degré 2 au dénominateur

$\Rightarrow$ filtre du deuxième ordre.

La forme canonique de cette fonction de transfert est $\underline{H} = \dfrac{A_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ avec $A_0 = 1$, $x = \dfrac{\omega}{\omega_0} = \omega\sqrt{LC}$ et $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$. On rappelle l'expression de la largeur de la bande passante : $\Delta x = \dfrac{1}{Q}$.

3) Par une étude asymptotique, déterminer les pentes des asymptotes du gain G_{dB} de ce filtre.

* Basses fréquences $x \ll 1 \ll \frac{1}{x}$

$$\underline{H} \simeq \frac{A_0}{-jQ/x} = j\frac{A_0 x}{Q}$$

$$G_{dB} = 20\log\frac{A_0 x}{Q} = 20\log\frac{A_0}{Q} + \underbrace{20\log x}_{\text{pente } +20\,dB/\text{décade}}$$

* Hautes fréquences $x \gg 1 \gg 1/x$

$$\underline{H} \simeq \frac{A_0}{jQx} = -j\frac{A_0}{Qx}$$

$$G_{dB} = 20\log\frac{A_0}{Qx} = 20\log\frac{A_0}{Q} \underbrace{- 20\log x}_{\text{pente } -20\,dB/\text{décade}}$$

Deux diagrammes de Bode en gain de ce filtre, obtenus pour des jeux de valeurs différentes de R, L et C, sont tracés sur les figures 2 et 3.

4) Expliquer la différence entre ces deux diagrammes. Préciser le paramètre qui varie et estimer sa valeur pour chaque graphique. Expliciter votre démarche.

La bande passante du diagramme n°2 est plus grande. Il est moins sélectif.
C'est le facteur de qualité Q qui varie.
On peut <u>lire</u> la bande passante à -3dB.
Filtre n°1 $x_{c_1} \simeq 0,9$ et $x_{c_2} \simeq 1,1$
$\Delta x \simeq 0,2 \Rightarrow Q \simeq 5$.

NOM : .... **Prénom :** .... **Groupe :** .....

Filtre n°2 $x_{c1} \simeq 0,1$ $x_{c2} \simeq 10$

$\Delta x \simeq 9,9$

$Q \simeq 0,1.$

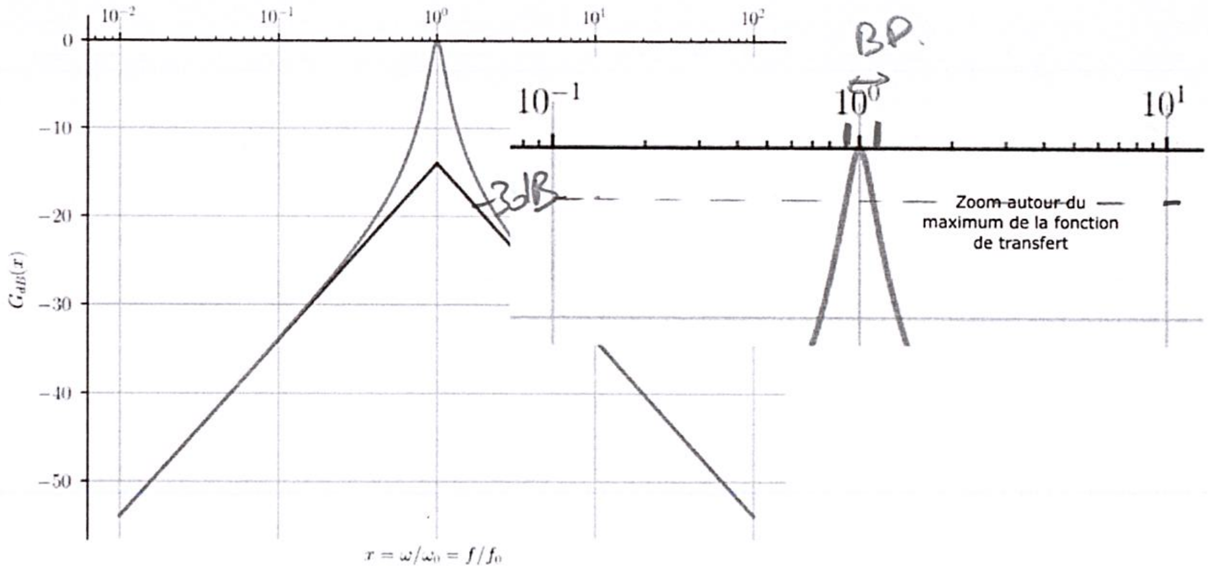


Figure 2 – Diagramme de Bode (avec ses asymptotes) du filtre avec le jeu de valeurs n°1

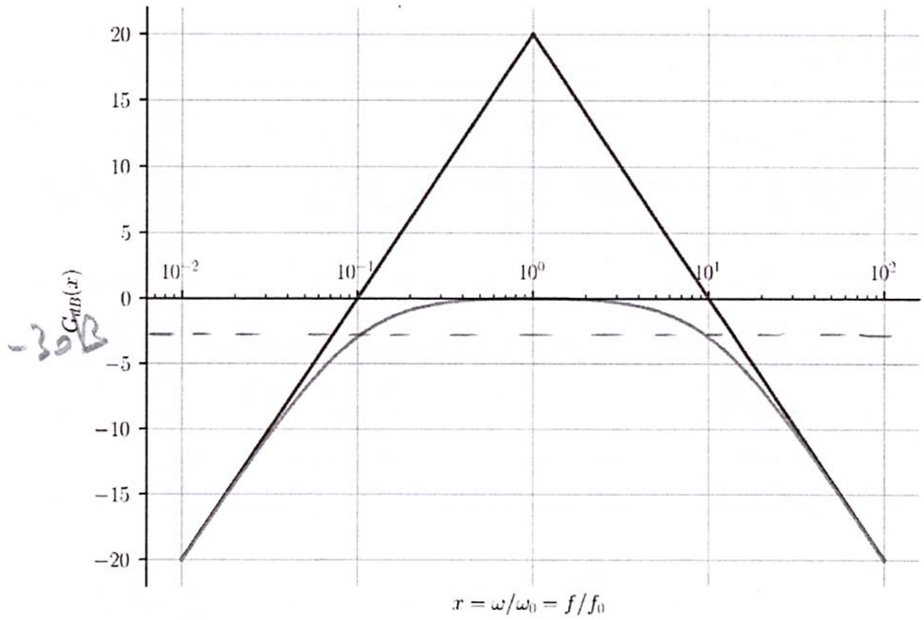


Figure 3 – Diagramme de Bode (avec ses asymptotes) du filtre avec le jeu de valeurs n°2

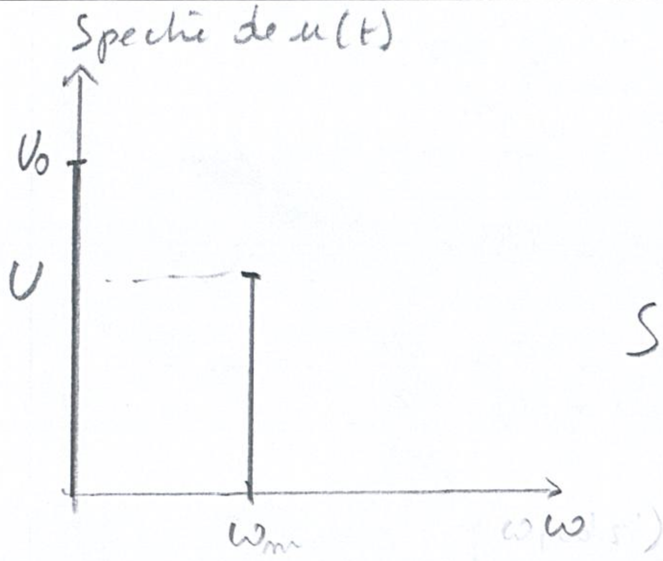
NOM : .... **Prénom :** .... **Groupe :** .....

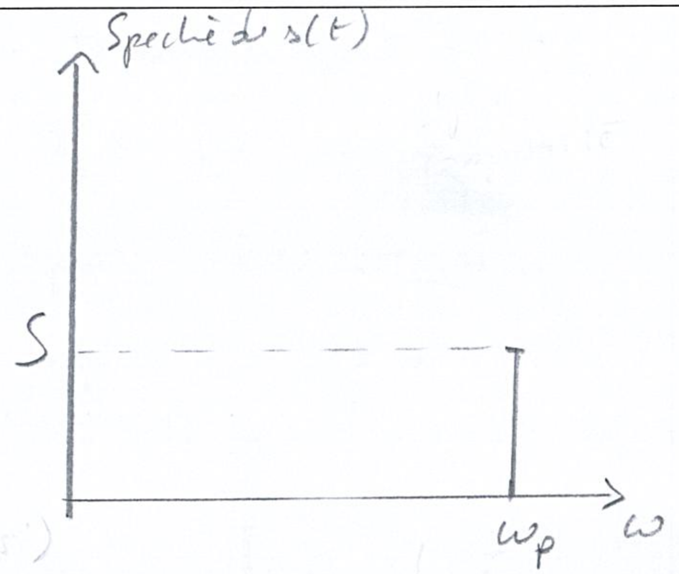
Partie B : Application - Spectre d'un signal

Pour transmettre un signal donné, on mélange le signal à transmettre (appelé signal modulateur) avec une porteuse de très haute fréquence.
Soit le signal modulateur : $u(t) = U_0 + U\cos(\omega_m t)$ et la porteuse $s(t) = S\cos(\omega_p t)$ avec $\omega_p >> \omega_m$.
Le signal modulé est le résultat de la multiplication de ces deux signaux $v(t) = u(t)\,s(t)$. C'est ce signal qui est transmis.

On donne les relations : $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$ et $\cos(a) = \cos(-a)$.

1a) Tracer les spectres de $u(t)$, $s(t)$.





1b) Déterminer l'expression de $v(t)$ et tracer son spectre. Expliquer pourquoi il est impossible de récupérer le signal modulateur $u(t)$ avec un simple filtre.

$v(t) = u(t)\,s(t)$

$v(t) = (U_0 + U\cos\omega_m t)(S\cos\omega_p t)$

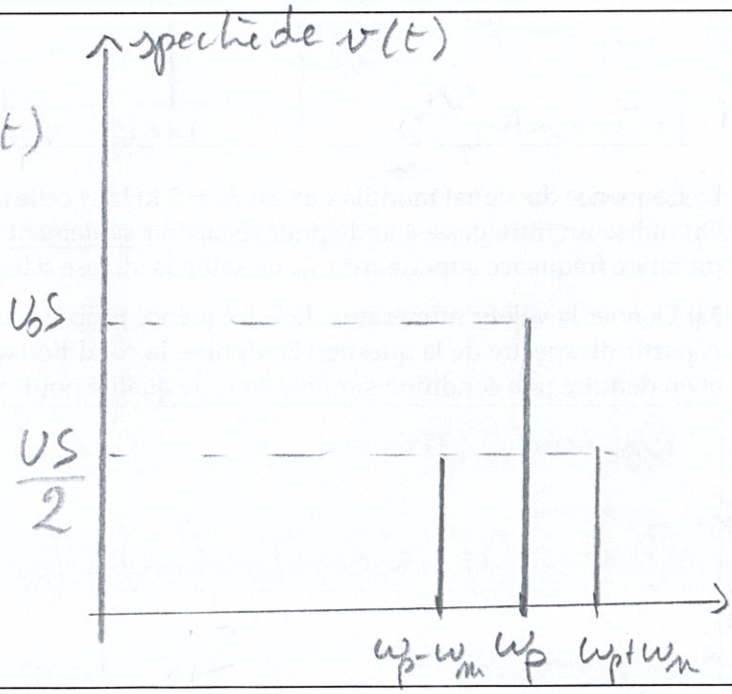
$= U_0 S\cos\omega_p t$

$+ US\cos\omega_m t\cos\omega_p t$

$= U_0 S\cos\omega_p t$

$+ \frac{US}{2}\cos(\omega_m + \omega_p)t$

$+ \frac{US}{2}\cos(\omega_p - \omega_m)t$



$\omega_p >> \omega_m$

La composante en ω_m n'apparait pas dans le spectre.
On ne peut pas la récupérer.

NOM : .... **Prénom :** .... **Groupe :** .....

2) Une des techniques utilisées est de multiplier $v(t)$ de nouveau par la porteuse à réception du signal. On obtient le signal $y(t) = v(t)s(t)$.

Déterminer l'expression littérale de $y(t)$ et tracer son spectre.

$$y(t) = v(t)s(t) = \left(V_0 S\cos\omega_p t + \frac{US}{2}\cos(\omega_p-\omega_m)t + \frac{US}{2}\cos(\omega_p+\omega_m)t\right) \times S\cos\omega_p t$$

$$= \frac{V_0S^2}{2}\cos(\underbrace{\omega_p-\omega_p}_{=0})t + \frac{V_0S^2}{2}\cos 2\omega_p t$$

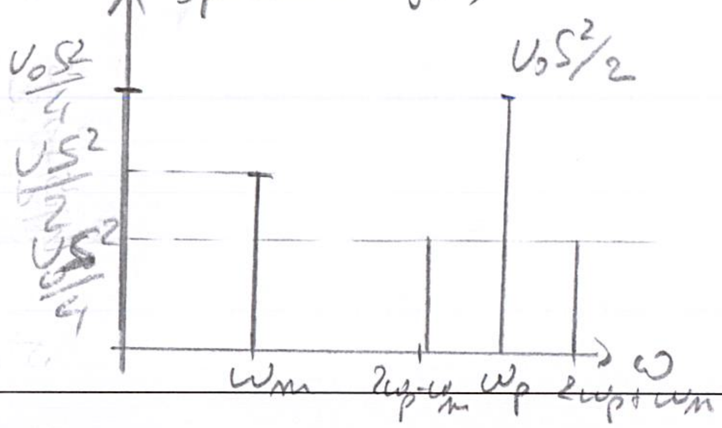
$$+ \frac{US^2}{4}\cos(2\omega_p-\omega_m)t + \frac{US^2}{4}\cos(-\omega_m t)$$

$$+ \frac{US^2}{4}\cos(2\omega_p+\omega_m)t + \frac{US^2}{4}\cos(\omega_m t)$$

$$= \frac{V_0S^2}{2} + \frac{V_0S^2}{2}\cos 2\omega_p t + \frac{US^2}{4}\cos(2\omega_p-\omega_m)t$$

$$+ \frac{US^2}{4}\cos(2\omega_p+\omega_m)t + \frac{US^2}{2}\cos\omega_m t$$

spectre de $y(t)$



La fréquence du signal modulateur est $f_m = 5$ kHz et celle de la porteuse $f_p = 500$ kHz.
On utilise un filtre passe-bande pour récupérer seulement le signal de fréquence f_m. On veut donc que la première fréquence supérieure à f_m ne soit pas incluse dans la bande passante.

3a) Donner la valeur numérique de la fréquence propre f_0 qui convient.
A partir du spectre de la question **2)**, donner la condition que doit vérifier la largeur de la bande passante et en déduire une condition sur le facteur de qualité pour ce filtre.

On veut garder f_m. On choisit $f_0 = f_m$.

On a $\Delta f < 2(2f_p - f_m) - f_m = 2000$ kHz

$\Delta f = \frac{f_0}{Q}$ $\qquad \frac{f_0}{Q} < 2000$ kHz $\qquad Q > \frac{5}{2000} = 0{,}0025$

NOM : .... **Prénom :** .... **Groupe :** .....

3b) Est-ce que les deux jeux de valeurs du filtre passe-bande étudiés dans la partie A conviennent? Commenter.

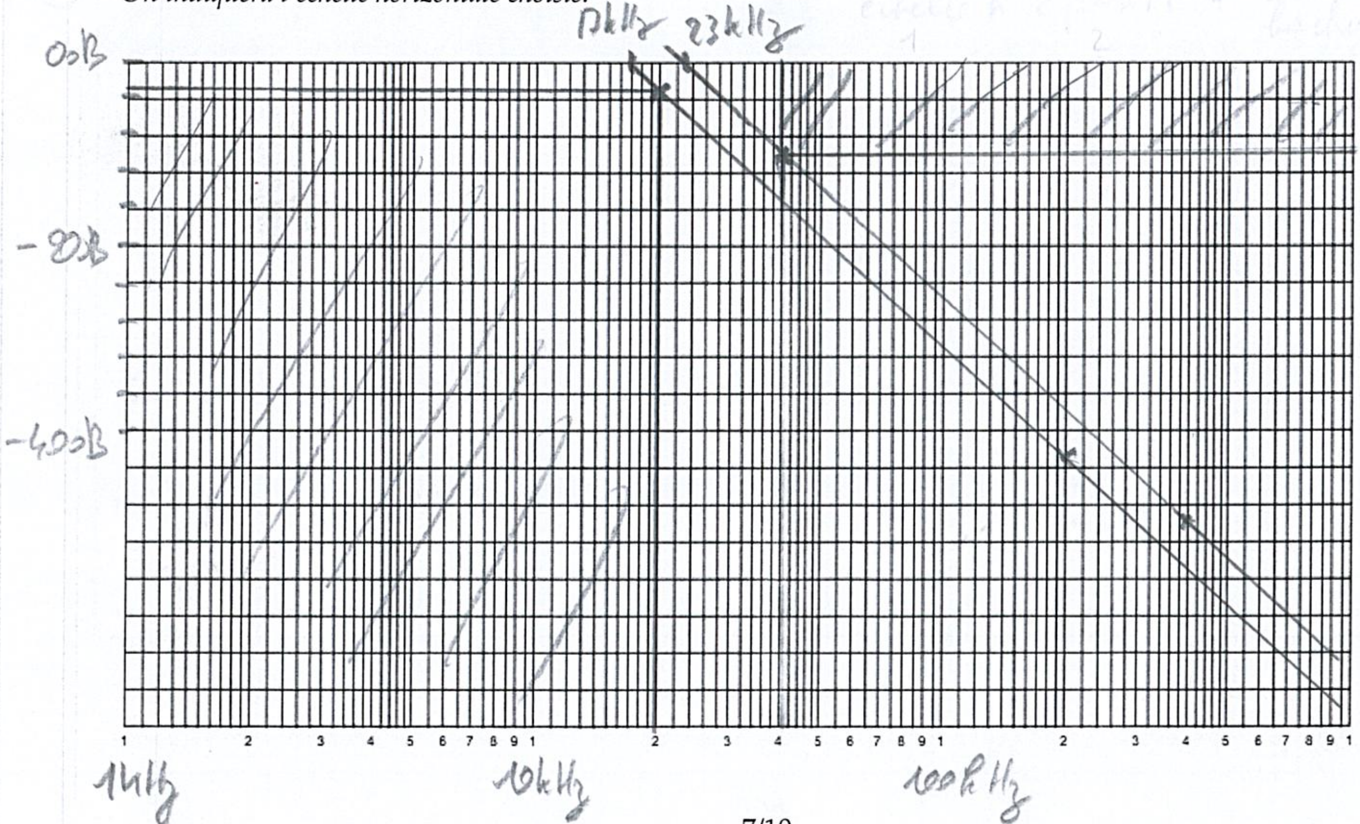
Les deux filtres conviennent.
On peut choisir un filtre très peu sélectif pour cette application.

Exercice 2 : Traitement d'un signal sonore - Gabarit

Un dispositif de traitement de signaux accoustiques nécessite la séparation des composantes sonores (de 0 à 20 kHz) et des composantes ultrasonores (au delà de 40 kHz). On souhaite éliminer les composantes ultrasonores.
Le cahier des charges du dispositif indique les caractéristiques suivantes :

- le gain pour les composantes sonores doit être supérieur à -3dB.
- le gain pour les composantes ultrasonores doit être inférieur à -10 dB.

1) Tracer le gabarit correspondant à ce cahier des charges. *On choisira 4 dB pour 1 carreau pour l'échelle verticale. On indiquera l'échelle horizontale choisie.*



NOM : .... **Prénom :** .... **Groupe :** .....

2) En déduire la nature et l'ordre du filtre correspondant. Justifier.

Le gabarit indique un filtre passe-bas.

On calcule la pente entre les 2 points

$$\text{pente} = \frac{-10-(-3)}{\log(40)-\log(20)} = -23\,dB/\text{décade}.$$

La pente est supérieure à -20 dB/decade en valeur absolue.

Il faut choisir un filtre du deuxième ordre qui aura une pente de -40 dB/decade.

3) A l'aide de l'annexe et du gabarit, déterminer les paramètres caractéristiques du filtre qui convient en justifiant. On donnera un encadrement pour la fréquence caractéristique. Le raisonnement sera clairement indiqué sur le graphique.

On peut choisir $A_0 = 1$

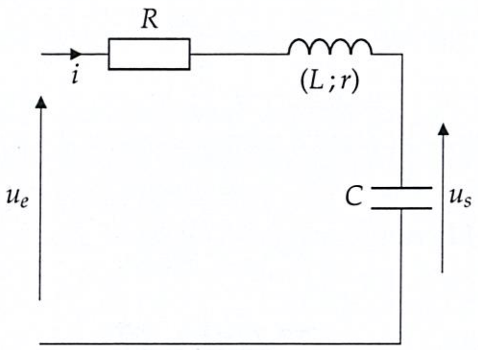
et $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (pour suivre les asymptotes).

Pour f_0, on <u>trace</u> les asymptotes passant par chaque point.

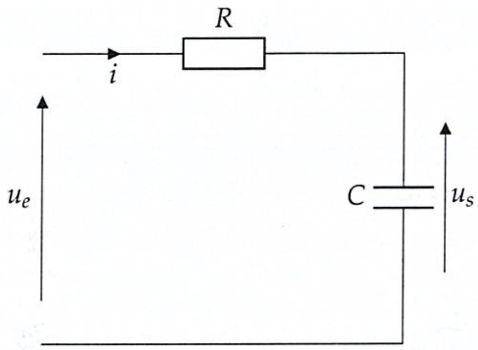
On trouve $17\,kHz < f_0 < 23\,kHz$

NOM : .... **Prénom :** .... **Groupe :** .....

On propose les deux filtres ci-dessous :



(1)



(2)

4) Donner les expressions des fonctions de transfert $\underline{H}_1$ et $\underline{H}_2$ des filtres (1) et (2), respectivement.

Ponts diviseurs de tension dans les 2 cas.

$$\underline{H}_1 = \frac{1/jC\omega}{R+(r+jL\omega)+\frac{1}{jC\omega}} \qquad \underline{H}_2 = \frac{1/jC\omega}{R+\frac{1}{jC\omega}}$$

$$\underline{H}_1 = \frac{1}{(R+r)jC\omega - LC\omega^2+1} \qquad \underline{H}_2 = \frac{1}{1+jRC\omega}$$

5) Indiquer le filtre qu'il faut choisir. Justifier.

Le premier filtre est un deuxième ordre alors que le second est de premier ordre. On choisit le premier.

6) A l'aide de l'annexe, donner la forme canonique de la fonction de transfert de ce filtre. Déterminer les expressions des paramètres caractéristiques.

$$\underline{H}_1 = \frac{A_0}{1+j\frac{x}{\alpha}+(jx)^2}$$

$A_0 = 1$

$\frac{x}{\alpha} = (R+r)C\omega$

$x^2 = LC\omega^2$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\alpha = \frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$A_0 = 1$

NOM : .... **Prénom :** .... **Groupe :** .....

7) On dispose au laboratoire d'une bobine d'inductance $L = 40$ mH et de résistance interne $r = 20\,\Omega$. On choisit la fréquence propre $f_0 = 20$ kHz. Déterminer les valeurs littérales puis numériques de R et C.

$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$4\pi^2 f_0^2 = \frac{1}{LC}$

$C = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L}$

$C = 1{,}6\,nF$

$Q = \frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}}$

$R + r = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}}$

$R + r = 7100\,\Omega$

$R = 7080\,\Omega$