Correction - Exercice 19 - Filtre de Hartley

On étudie le circuit suivant (les masses peuvent être toutes reliées) :

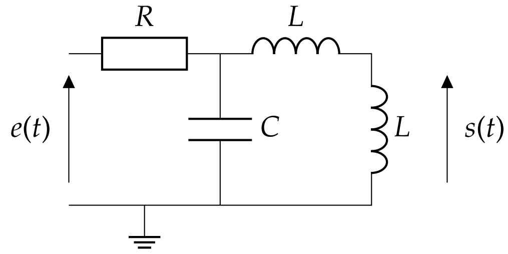

Figure 1

On peut aussi représenter le circuit selon le schéma ci-dessous :

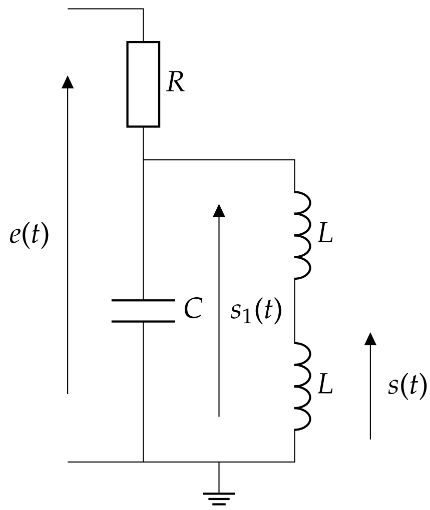

Figure 2

On peut donc retracer ce circuit en introduisant un dipôle équivalent correspondant à l'association du condensateur en parallèle avec les deux bobines :

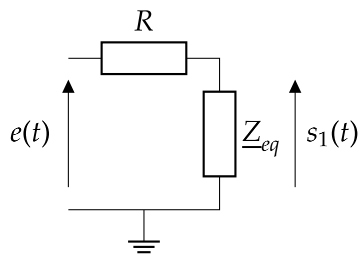

Figure 3

Il faut introduire la tension $s_1(t)$ aux bornes de ce dipôle équivalent.

1. On doit écrire deux ponts diviseurs de tension :
   - Entre $e(t)$ et $s_1(t)$:
   $$\underline{s}_1(t) = \frac{\underline{Z}_{eq}}{R + \underline{Z}_{eq}} \underline{e}(t)$$
   - entre $s_1(t)$ et $s(t)$:
   $$\underline{s}(t) = \frac{jL\omega}{jL\omega + jL\omega} \underline{s}_1(t) = \frac{1}{2} \underline{s}_1(t)$$

En combinant les deux équations, on en déduit la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{s}_1(t)} \frac{\underline{s}_1(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{1}{2} \frac{\underline{Z}_{eq}}{R + \underline{Z}_{eq}}$$

.

On détermine l'expression de $\underline{Z}_{eq}$:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{jC\omega}} + \frac{1}{jL\omega + jL\omega}$$

.

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{2jL\omega}{1 - 2LC\omega^2}$$

Finalement, on obtient l'expression de la fonction de transfert :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{jL\omega}{R - 2RLC\omega^2 + 2jL\omega}}$$

2. La fonction de transfert tend vers 0 en $\pm\infty$, c'est donc un filtre passe-bande, du deuxième ordre (le polynôme au dénominateur est d'ordre 2).

   La forme canonique est donc : $\underline{H} = \dfrac{A_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$.

   On modifie la fonction de transfert pour avoir une forme équivalente : $\underline{H} = \dfrac{\frac{1}{2}}{-j\frac{R}{2L\omega} + jRC\omega + 1}$.

   On identifie les différents paramètres : $\boxed{A_0 = \frac{1}{2}}$.

$$Qx = RC\omega$$

$$\frac{Q}{x} = \frac{R}{2L\omega}$$

.

En multipliant les deux dernières équations, on obtient $Q^2 = R^2\frac{C}{2L}$ et finalement

$$\boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{2L}}}.$$

En écrivant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, on peut en déduire l'expression de ω_0 :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}}.$$

3. a) Etude asymptotique du diagramme de Bode en gain :
   - en basses fréquences : $x << 1 << \frac{1}{x}$, on garde donc le terme dominant en $\frac{1}{x}$ au dénominateur. L'expression approchée de la fonction de transfert est donc : $\underline{H} = \frac{A_0}{-jQ\frac{1}{x}} = j\frac{A_0 x}{Q}$. L'expression de son module est $|\underline{H}| = \frac{A_0 x}{Q}$ et celle du gain est $G_{dB} = 20\log\left(\frac{A_0 x}{Q}\right) = 20\log(x) + 20\log\left(\frac{A_0}{Q}\right)$. La pente de l'asymptote est donc de $\boxed{+20 \text{ dB/décade}}$.

- en hautes fréquences : $x >> 1 >> \frac{1}{x}$, on garde donc le terme dominant en x au dénominateur. L'expression approchée de la fonction de transfert est donc : $\underline{H} = \frac{A_0}{jQx} = -j\frac{A_0}{Qx}$. L'expression de son module est $|\underline{H}| = \frac{A_0}{Qx}$ et celle du gain est $G_{dB} = 20\log\left(\frac{A_0}{Qx}\right) = -20\log(x) + 20\log\left(\frac{A_0}{Q}\right)$.
  La pente de l'asymptote est donc de -20 dB/décade.

b) Le module de la fonction de transfert s'écrit pour tout x : $|\underline{H}| = \dfrac{A_0}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$.

Le maximum de cette fonction est obtenu pour $x = 1$. Sa valeur est $H_{max} = A_0$ et le gain maximum vaut donc $G_{dB_{max}} = 20\log A_0 = 20\log\frac{1}{2} = -6$ dB.

Ce maximum ne dépend des composants électriques utilisés.

L'abscisse du maximum est $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$.

Application numérique : $\omega_0 = 70700$ rad.s^{-1}.

c) On sait que la largeur de la bande passante s'écrit : $\Delta x = \frac{1}{Q}$ ou en multipliant par ω_0, $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

En remplaçant ω_0 et Q par leurs expressions, on obtient : $\Delta\omega = \dfrac{1}{\sqrt{2LC}}\dfrac{1}{R\sqrt{\frac{C}{2L}}} = \dfrac{1}{RC}$.

Application numérique : $\Delta\omega = 100$ rad.s^{-1}.

La bande passante est donc $\left[70650\text{rad.s}^{-1}; 70750\text{rad.s}^{-1}\right]$.

Remarque complémentaire : L'intersection des asymptotes se produit à la fréquence propre, c'est à dire pour $\omega = \omega_0$ ou $x = 1$. En utilisant les équations des deux asymptotes obtenues à la question 3a), on peut calculer l'ordonnée de ce point d'intersection. Sa valeur est $20\log\frac{A_0}{Q} = 20\log A_0 - 20\log Q$.
Plus le facteur de qualité est grand (et le filtre sélectif), plus l'ordonnée de point est basse. Ici, on a un filtre sélectif (facteur de qualité $Q = 707$).
Si le facteur de qualité est plus petit (courbe en rouge ci-dessous), l'intersection des asymptotes est plus haute et la bande passante plus large.