

Corrigé de l'EC5: Entropie d'une explosion

Énoncé

On reprend les transformations de l'exercice C4. On supposera que lors de la transformation $0 \rightarrow 1$, les gaz brûlés jouent le rôle d'un thermostat à la température T_1 .

1. Redémontrer les formules de variation d'entropie ΔS en fonction des variables T et P puis V et P dans le cas d'un gaz parfait.
2. Déterminer les entropies échangées, créées et la variation d'entropie lors des trois transformations. Commenter.
3. Représenter, en justifiant le tracer, le cycle dans le diagramme entropique (T, S) .

Correction

1. D'après la seconde identité thermodynamique, on a $dH = TdS + VdP$.

$$\text{Donc } dS = \frac{1}{T}dH - \frac{V}{T}dP.$$

Le gaz étant supposé parfait, on a, d'après la seconde loi de Joule, H ne dépend que de T , donc $dH = C_P dT$.

$$\text{D'après la loi des gaz parfaits, } \frac{V}{T} = \frac{nR}{P}.$$

$$\text{Finalement, on a } dS = \frac{C_P}{T}dT - \frac{nR}{P}dP.$$

Puisque le gaz est supposé parfait, on a $C_P = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}$ constant de T .

$$\text{On a donc } dS = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P}.$$

$$\text{En intégrant entre l'état initial et l'état final, on a } \Delta S = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) - nR \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right).$$

D'après la loi des gaz parfaits, on a $PV = nRT$.

$$\text{Donc } \frac{T_f}{T_i} = \frac{nRT_f}{nRT_i} = \frac{P_f V_f}{P_i V_i}.$$

$$\text{Donc } \Delta S = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right) + \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) - nR \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right).$$

$$\text{Finalement, on a } \Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right) + \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right).$$

2. La transformation $0 \rightarrow 1$ est isochore, on trouve donc $\Delta S_{0 \rightarrow 1} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)$.

$$\text{Donc } \Delta S_{0 \rightarrow 1} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln\left(1 + \frac{(\gamma-1)Q_e}{P_0 V_0}\right).$$

Les gaz brûlés jouant le rôle d'un thermostat dans la transformation $0 \rightarrow 1$, on a $S_{0 \rightarrow 1}^{ech} = \frac{Q_e}{T_1}$.

$$\text{Donc } S_{0 \rightarrow 1}^{ech} = \frac{Q_e}{T_0 + \frac{\gamma-1}{nR} Q_e}.$$

D'après le deuxième principe, on a $S^{cr} = \Delta S - S^{ech}$.

$$\text{Donc } S_{0 \rightarrow 1}^{cr} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln\left(1 + \frac{(\gamma-1)Q_e}{P_0 V_0}\right) - \frac{Q_e}{T_0 + \frac{\gamma-1}{nR} Q_e}.$$

Donc $S_{0 \rightarrow 1}^{cr} \neq 0$, la combustion est bien irréversible.

$$1 \rightarrow 2 \text{ est adiabatique, donc } S_{1 \rightarrow 2}^{ech} = 0 \text{ et réversible donc } S_{1 \rightarrow 2}^{cr} = 0.$$

$$\text{D'après le deuxième principe, } \Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_{1 \rightarrow 2}^{ech} + S_{1 \rightarrow 2}^{cr} = 0.$$

$$\text{La transformation } 2 \rightarrow 3 \text{ est isobare, donc } \Delta S_{2 \rightarrow 3} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{V_0}{\left(1 + \frac{(\gamma-1)Q_e}{P_0 V_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_0}\right).$$

Donc $\Delta S_{2 \rightarrow 3} = -\frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(1 + \frac{(\gamma-1)Q_e}{P_0 V_0} \right).$

On remarque que $\Delta S_{cycle} = \Delta S_{0 \rightarrow 1} + \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} = 0$, ce qui est cohérent car $0 = 3$ et S est une fonction d'état, la variation de S sur un cycle est donc nulle.

L'air joue le rôle d'un thermostat lors de la transformation $2 \rightarrow 3$, on a donc $S_{2 \rightarrow 3}^{ech} = \frac{Q_{2 \rightarrow 3}}{T_0} = \frac{\frac{nR\gamma}{\gamma-1} T_0 \left(1 - \left(1 + \frac{(\gamma-1)Q_e}{P_0 V_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right)}{T_0}.$

Finalement $S_{2 \rightarrow 3}^{ech} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \left(1 - \left(1 + \frac{(\gamma-1)Q_e}{P_0 V_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right).$

D'après le deuxième principe, on a $S^{cr} = \Delta S - S^{ech}.$

Donc $S_{2 \rightarrow 3}^{cr} = -\frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(1 + \frac{(\gamma-1)Q_e}{P_0 V_0} \right) - \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \left(1 - \left(1 + \frac{(\gamma-1)Q_e}{P_0 V_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right).$

Donc $S_{2 \rightarrow 3}^{cr} \neq 0$, la détente est également irréversible.

3. D'après la question 1, lors de la transformation isobare $2 \rightarrow 3$, $\Delta S = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T}{T_2} \right).$

Donc $T = T_2 \exp \left(\frac{(\gamma-1)\Delta S}{nR\gamma} \right).$

D'après la loi des gaz parfaits, on a $PV = nRT.$

Donc $\frac{P_f}{P_i} = \frac{nRT_f}{V_f} \frac{V_i}{nRT_i} = \frac{T_f V_i}{T_i V_f}.$

Donc $\Delta S = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) - nR \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) - nR \ln \left(\frac{V_i}{V_f} \right) = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right).$

Lors de la transformation isochore $0 \rightarrow 1$, on a $\Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T}{T_0} \right).$

Donc $T = T_0 \exp \left(\frac{(\gamma-1)\Delta S}{nR} \right).$

Lors de la transformation adiabatique réversible $1 \rightarrow 2$, on a $\Delta S = 0$, c'est une droite verticale.

Pour finir, on a $T_1 > T_2$.

