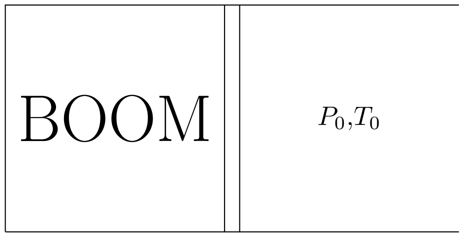
Corrigé de l'EC4: Piston et explosion

Énoncé

Considérons un piston de masse négligeable et pouvant se déplacer sans frottement dans un cylindre horizontal. L'air extérieur est à la pression P_0 et T_0.
Le compartiment de gauche contient une quantité de matière n de gaz supposé parfait de coefficient isentropique γ. Le gaz occupe initialement un volume V_0.



À l'instant $t = 0$, une explosion a lieu dans le compartiment de gauche apportant instantanément au gaz un transfert thermique Q_e. Le gaz subit alors les transformations suivantes :

$0 \to 1$ Échauffement isochore

$1 \to 2$ Détente adiabatique réversible jusqu'à ce que le piston atteigne l'équilibre mécanique

$2 \to 3$ Refroidissement isobare jusqu'à ce que le gaz atteigne l'équilibre thermique.

1. Justifier sans calcul que les états 0 et 3 sont les mêmes.
2. Représenter la suite de transformation dans un diagramme de Clapeyron.
3. Exprimer la température, le volume et la pression dans les états 1 et 2 en fonction des données de l'énoncé.
4. Exprimer les travaux mécaniques et transferts thermiques lors de ces trois transformations en fonction des données de l'énoncé. Commenter.

Correction

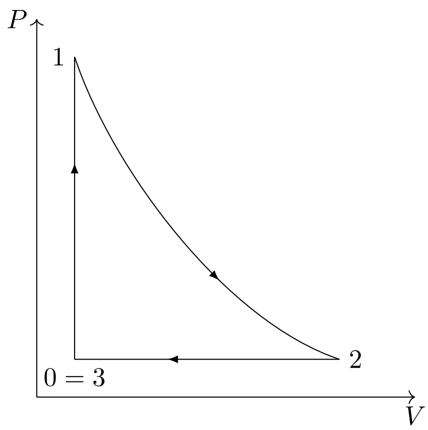
1. Dans les états 0 et 3, on a équilibre mécanique entre le gaz à l'intérieur du cylindre et l'extérieur. Donc $P_3 = P_0$.

   Dans les états 1 et 3, on a équilibre thermique entre le gaz à l'intérieur du cylindre et l'extérieur. Donc $T_3 = T_0$.

   Le système étant fermé, n est constant.

   Le gaz étant supposé parfait, $V_3 = \frac{nRT_3}{P_3} = \frac{nRT_0}{P_0} = V_0$.

   Les états 0 et 3 sont donc bien les mêmes.

2. 

3. $0 \to 1$ est isochore donc $\boxed{V_1 = V_0}$.
   Dans le cas d'une transformation isochore, $\delta W = -P_{ext} dV = 0$, donc $W = 0$.
   D'après le premier principe, on a donc $dU = \delta W + \delta Q = \delta Q$.
   D'après la première loi de Joule, le gaz étant supposé parfait, on a $\delta Q = dU = C_V dT = \frac{nR}{\gamma-1} dT$.
   En intégrant, on trouve $Q_e = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_0)$.
   Donc $\boxed{T_1 = T_0 + \frac{\gamma-1}{nR} Q_e}$.
   Le gaz étant supposé parfait, $P_1 = \frac{nRT_1}{V_1} = \frac{nRT_0 + (\gamma-1)Q_e}{V_0}$.
   On a finalement, $\boxed{P_1 = P_0 + \frac{(\gamma-1)Q_e}{V_0}}$.
   $2 \to 0$ étant isobare, on a $\boxed{P_2 = P_3 = P_0}$.
   $1 \to 2$ étant adiabatique réversible et le gaz étant supposé parfait, on a $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$.
   Donc $V_2 = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_1$.
   Finalement, $\boxed{V_2 = \left(1 + \frac{(\gamma-1)Q_e}{P_0 V_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_0}$
   Le gaz étant supposé parfait, $T_2 = \frac{P_2 V_2}{nR} = \left(1 + \frac{(\gamma-1)Q_e}{P_0 V_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{P_0 V_0}{nR}$.
   On a finalement, $\boxed{T_2 = \left(1 + \frac{(\gamma-1)Q_e}{P_0 V_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} T_0}$.
4. D'après ce qui précède, $\boxed{W_{0\to1} = 0}$ et $\boxed{Q_{0\to1} = Q_e}$.
   $1 \to 2$ étant adiabatique, $\boxed{Q_{1\to2} = 0}$.
   D'après le premier principe, on a donc $dU = \delta W + \delta Q = \delta W$.
   D'après la première loi de Joule, le gaz étant supposé parfait, on a $\delta W = dU = C_V dT = \frac{nR}{\gamma-1} dT$.
   Donc $W_{1\to2} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1) = \frac{nR}{\gamma-1}\left(\left(1 + \frac{(\gamma-1)Q_e}{P_0 V_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} T_0 - T_0 - \frac{\gamma-1}{nR} Q_e\right)$
   Donc $\boxed{W_{1\to2} = \frac{nR}{\gamma-1} T_0 \left(\left(1 + \frac{(\gamma-1)Q_e}{P_0 V_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 - \frac{\gamma-1}{P_0 V_0} Q_e\right)}$.
   $2 \to 0$ étant isobare, on a $\delta W_{2\to0} = -P_0 dV$.
   Donc $W_{2\to0} = -P_0(V_0 - V_2)$.
   Finalement $\boxed{W_{2\to0} = \left(\left(1 + \frac{(\gamma-1)Q_e}{P_0 V_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1\right) P_0 V_0}$.
   Le premier principe dans le cas isobare se réécrit $\Delta H = Q$.
   Le gaz étant parfait, il suit la seconde loi de Joule, H ne dépend donc que de la température et $\Delta H = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}(T_0 - T_2)$.
   Donc $\boxed{Q_{2\to0} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} T_0 \left(1 - \left(1 + \frac{(\gamma-1)Q_e}{P_0 V_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)}$.
   On remarque que $Q_{2\to0} \neq Q_e$, l'énergie thermique de l'explosion n'est donc pas entièrement transmise à l'air extérieur. Cette différence entre les transferts thermiques se retrouve dans la différence entre les travaux mécaniques, l'énergie totale U étant une fonction d'état, celle-ci est nécessairement conservée sur un cycle comme nous le verrons plus tard dans le cours.