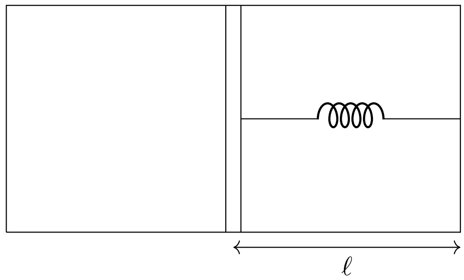
Corrigé de l'EC3: Piston et ressort

Énoncé



Considérons un piston calorifugé de masse négligeable et pouvant se déplacer dans un cylindre calorifugé horizontal de section $\Sigma = 300\text{cm}^2$.
Le compartiment de gauche contient une quantité de matière $n = 0,01$ mol de gaz supposé parfait de coefficient isentropique $\gamma = 1,4$.
Le compartiment de droite est vide de gaz et contient un ressort de raideur $k = 1,0.10^4\text{N.m}^{-1}$ et de longueur à vide ℓ_0. Le ressort est fixé d'un côté au piston et de l'autre côté au cylindre. On notera ℓ la longueur du ressort.

Initialement le piston est bloqué, le ressort est à sa longueur à vide et le gaz est à température $T_i = 290\text{K}$ et à pression $P_i = 1,0$ bar. À $t = 0$, on débloque le piston et on le laisse évoluer jusqu'à un état d'équilibre.
On note, dans l'état final, la pression P_f, la température T_f et le volume V_f pour le gaz et ℓ_{eq} la longueur du ressort.

1. Donner, en fonction des constantes de l'énoncé, le volume initial V_i du compartiment gauche avant que le piston ne soit débloqué. Réaliser l'application numérique.

2. En appliquant le premier principe de la thermodynamique au système gaz parfait et piston, trouver une équation reliant T_f, ℓ_{eq} et les constantes données dans l'énoncé.

3. En écrivant le PFD appliqué au piston, montrer que P_f est solution de l'équation $\left(1 + \frac{2}{\gamma-1}\right) P_f^2 + \frac{2kV_i}{(\gamma-1)\Sigma^2} P_f - \frac{2knRT_i}{(\gamma-1)\Sigma^2} = 0$.

4. Résoudre numériquement l'équation précédente et donner les valeurs numériques de P_f, V_f, T_f et $\ell_{eq} - \ell_0$. Commenter.

Rappel : Le travail d'une force de rappel de ressort pour un ressort s'allongeant de sa longueur à vide ℓ_0 et une longueur ℓ est $W_{ressort} = -\frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$.

Correction

1. Le gaz est supposé parfait, donc $V_i = \frac{nRT_i}{P_i}$.

   Donc $\boxed{V_i = 24.10^{-5}\text{m}^3 = 240\text{cm}^3}$.

2. Contrairement au cas habituel, on a ici d'autres forces que les forces de pression qui travaillent. On a donc :

$$\Delta U = W_{pression} + W_{ressort} + Q$$

   Puisque c'est un gaz parfait, il suit la première loi de Joule, donc U ne dépend que de T.

   Donc $dU = C_V dT = \frac{nR}{\gamma-1} dT$, on a donc, en intégrant, $\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1}(T_f - T_i)$.

   Le compartiment de droite est vide, donc $P_{ext} = 0$, $W_{pression} = 0$.

   $W_{ressort} = -\frac{1}{2}k(\ell_{eq} - \ell_0)^2$ d'après l'indication.

   $Q = 0$ car le compartiment et le cylindre sont calorifugés.

   Finalement $\boxed{T_f = T_i - \frac{(\gamma-1)k}{2nR}(\ell_{eq} - \ell_0)^2}$.

3. Le gaz étant supposé parfait, on a $P_fV_f = nRT_f$.

   Donc $\frac{P_fV_f}{nR} = T_i - \frac{(\gamma-1)k}{2nR}(\ell_{eq} - \ell_0)^2$.

   À l'équilibre mécanique, on a égalité entre la force de pression du compartiment gauche et la force de rappel du ressort. Donc $P_f\Sigma = k(\ell_0 - \ell_{eq})$.

   On notera qu'il n'y a pas de frottement solide, en effet, si l'on regarde le PFD projeté sur l'axe vertical, il n'y a qu'une seule force, la réaction normale du support (la masse du piston étant négligeable, son poids l'est également). La réaction normale est donc nulle, par loi de Coulomb, la réaction tangentielle l'est également. Les frottements fluides sont nuls à l'équilibre.

   Donc $\frac{P_fV_f}{nR} = T_i - \frac{(\gamma-1)}{2nRk}(P_f\Sigma)^2$.

   Donc $P_f^2 + \frac{2kV_f}{(\gamma-1)\Sigma^2}P_f - \frac{2knRT_i}{(\gamma-1)\Sigma^2} = 0$

   On a conservation du volume total, donc $V_i + \Sigma\ell_0 = V_f + \Sigma\ell_{eq}$.

   Donc $V_f = V_i + \Sigma(\ell_0 - \ell_{eq}) = V_i + \frac{\Sigma^2}{k}P_f$.

   Donc $\boxed{P_f^2 + \frac{2kV_i}{(\gamma-1)\Sigma^2}P_f + \frac{2}{\gamma-1}P_f^2 - \frac{2knRT_i}{(\gamma-1)\Sigma^2} = 0}$.

4. On a $\gamma = \frac{7}{5}$.

   Donc $P_f^2 + \frac{5kV_i}{\Sigma^2}P_f + 5P_f^2 - \frac{5knRT_i}{\Sigma^2} = 0$.

   On a $\frac{5kV_i}{6\Sigma^2} = 2,22.10^3$ Pa et $\frac{5knRT_i}{6\Sigma^2} = 2,23.10^8$ Pa^2.

   Donc $\Delta = 8,97.10^8\text{Pa}^2$.

   Donc $\boxed{P_f = 1,39.10^4\text{Pa}}$.

   $\boxed{\ell_{eq} - \ell_0 = -\frac{\Sigma}{k}P_f = -0,0416\text{m} = -4,16\text{cm}}$.

   $\boxed{V_f = V_i + \Sigma(\ell_0 - \ell_{eq}) = 0,00149\text{m}^3 = 1490\text{cm}^3}$.

   $\boxed{T_f = \frac{P_fV_f}{nR} = 249\text{K}}$.

   Il y en a plein de commentaires possibles. On part d'une situation où le ressort est à l'équilibre et une force de pression s'exerce de la part du cylindre de gauche, il est donc cohérent que le piston se déplace vers la droite et donc $\ell_{eq} < \ell_0$.

   Le volume offert au gaz augmente, on s'attend donc à une diminution de la pression.

   L'énergie du système gaz et piston est initialement uniquement thermique et se répartit ensuite entre énergie thermique et élastique, on s'attend donc à une température du gaz plus basse que la température initiale.