

TP 4 : Conditions d'optimalité

Stéphane Canu

22 septembre 2025, MLA, ITI, INSA Rouen

Le but du TP est d'étudier les conditions d'optimalité. En d'autres termes, vérifier qu'une solution proposée par un algorithme est bien la solution optimale du problème d'optimisation. Pour le faire fonctionner, vous êtes supposé avoir déjà installé CVX (que vous pourrez télécharger à cette adresse : <http://cvxr.com/cvx/>)

Pour cette exercice, nous allons reprendre les données de l'exercice de la semaine dernière : une matrice X de taille $n = 200$ individus et $p = 2n$ variables. Vous prendrez soin de centrer la matrice et de la normaliser de sorte que $\sum_{i=1}^n X_{ij}^2 = 1$. Un vecteur de paramètre $w_{opt} \in \mathbb{R}^p$ dont $k = 5$ seulement sont non nulles. Un vecteur de réponses $y = Xw_{opt} + \varepsilon \in \mathbb{R}^n$ où ε est un bruit Gaussien entraînant un rapport signal sur bruit de 2.

Ex. 1 — Le cas de la ridge regression

1. Résoudre le problème suivant de la ridge pour $\lambda = 0.005n$

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}^p} J_\lambda(\beta) \quad \text{avec} \quad J_\lambda(\beta) = \frac{1}{2} \|X\beta - y\|^2 + \frac{1}{2} \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j|^2$$

2. démontrez numériquement que cette solution est bien optimale

Ex. 2 — Le cas de la ridge regression comme un problème d'optimisation sous contrainte

1. Résoudre le problème de ridge régression suivant pour $t = 2.507$

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \quad \frac{1}{2} \|X\beta - y\|^2 \\ \text{avec} \quad \sum_{j=1}^p |\beta_j|^2 \leq t \end{array} \right. \quad (1)$$

2. démontrez numériquement que cette solution est bien optimale en vérifiant les KKT du problème

Ex. 3 — Le cas du Lasso

1. Résoudre le problème suivant du Lasso pour $\lambda = 0.001n$

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}^p} J_\lambda(\beta) \quad \text{avec} \quad J_\lambda(\beta) = \frac{1}{2} \|X\beta - y\|^2 + \lambda \sum_{j=1}^p |\beta_j|$$

2. démontrez numériquement que cette solution est bien optimale

Ex. 4 — Le cas du Lasso comme un problème d'optimisation sous contrainte

1. Résoudre le problème du lasso suivant pr $t = 7, 28$

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \quad \frac{1}{2} \|X\beta - y\|^2 \\ \text{avec} \quad \sum_{j=1}^p |\beta_j| \leq t \end{array} \right. \quad (2)$$

2. démontrez numériquement que cette solution est bien optimale en vérifiant les KKT du problème