INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES ROUEN NORMANDIE

Devoir Surveillé de Mécanique des fluides

EC P8
J. Yon
18/06/25
durée : 1h30

Total / 30 pts

Les calculatrices sont autorisées. Aucun document n'est autorisé.
Vous reporterez vos réponses et résultats directement sur la copie.
Merci d'éteindre et de ranger les téléphones portables.

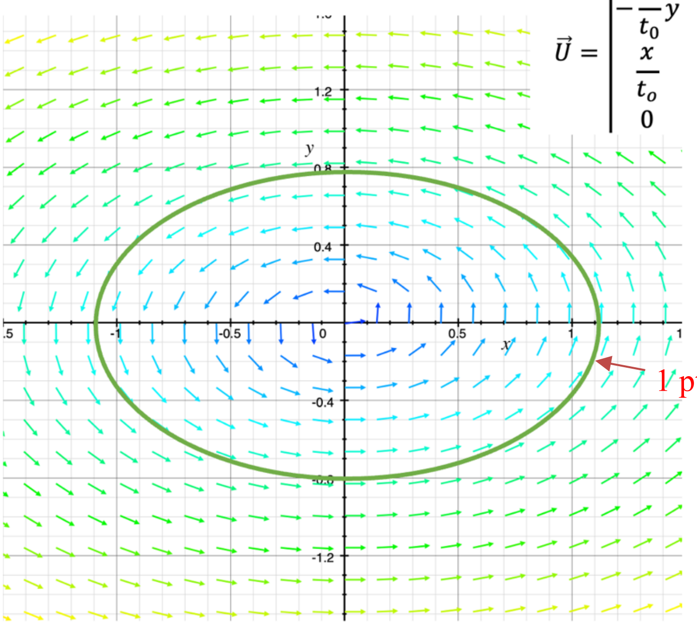
Cinématique : Etude de champs eulériens

Indiquer à côté des champs de vitesses représentés ci-dessous les résultats du calcul de leur divergence, rotationnel, en déduire s'ils sont compressibles, rotationnels. Tracer une ligne de courant, dire s'ils sont stationnaires et exprimer le champ des accélérations particulaires associés. t_0, v_0 et L sont une constante.

1.

5 pts

$$\vec{U} = \left| \begin{array}{l} -\dfrac{2}{t_0}y \\ \dfrac{x}{t_o} \\ 0 \end{array} \right.$$



1 pt

Sa divergence est nulle. S'il existe, cet écoulement est incompressible 1 pt

Son rotationnel est $\overrightarrow{rot}(\vec{U}) = \frac{3}{t_0}\vec{z}$ 1 pt

Il est donc rotationnel.

Stationnaire car $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \vec{0}$ 1 pt

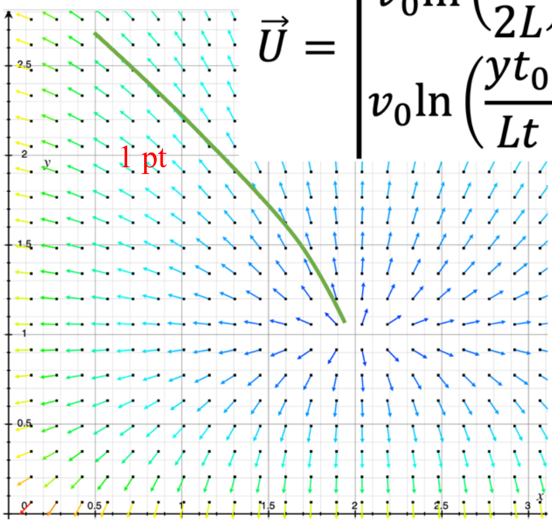
Sa trajectoire = ligne de courant

Son champ des accélérations est :

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \left| \begin{array}{l} -2x/t_0^2 \\ -2y/t_0^2 \\ 0 \end{array} \right.$$ 1 pt

2.

5 pts



1 pt

$$\vec{U} = \left| \begin{array}{l} v_0 \ln\left(\frac{x}{2L}\right) \\ v_0 \ln\left(\frac{y t_0}{L t}\right) \end{array} \right.$$

Sa divergence est non nulle, elle vaut $\frac{v_0}{x} + \frac{v_0}{y}$. 1 pt

S'il existe, cet écoulement est compressible.

Son rotationnel est $\overrightarrow{rot}(\vec{U}) = \vec{0}$ 1 pt

Il est donc irrotationnel.

Instationnaire car $\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \left| \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{v_0}{t} \end{array} \right.$ 1 pt

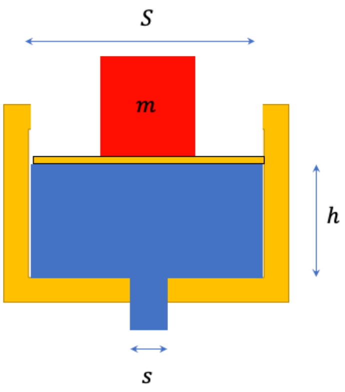
Son champ des accélérations est : $\frac{d\vec{U}}{dt} = \left| \begin{array}{c} \frac{v_0^2}{x} \ln\left(\frac{x}{2L}\right) \\ -\frac{v_0}{t} + \frac{v_0^2}{y} \ln\left(\frac{y t_0}{L t}\right) \\ 0 \end{array} \right.$

1 pt

Dynamique des fluides

3 pts

1. Un cube de masse $m = 1$ *kg* exerce une pression sur un piston de masse négligeable reposant horizontalement sur un réservoir d'eau de section $S = 4\ m^2$ et de hauteur $h = 10$ *cm*. Un jet s'échappe par un petit trou de diamètre $d = 5$ *cm* et de section s situé en bas du réservoir (avec s << S). Déterminer, par un calcul rapide, à l'aide du théorème de Bernoulli, l'expression de la vitesse v du jet s'échappant du trou en fonction des données du problème. Réaliser l'application numérique, on prendra $g = 9.81$ SI.



On utilise Bernoulli. 1 pt

$$\underbrace{P_a}_{P_0 + \frac{mg}{S}} + \underbrace{\frac{\rho V_a^2}{2}}_{0} + \rho g z_a = \underbrace{P_b}_{P_0} + \frac{\rho V_b^2}{2} + \rho g z_b$$

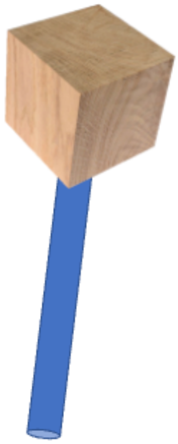
$$V_b^2 = \frac{2mg}{\rho S} + 2gh$$

$$V_b = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S} + 2gh}$$ 1 pt

$$= \sqrt{\frac{2 \times 1 \times 9.81}{1000 \times 4} + 2 \times 9.81 \times 0.1}$$

=1.40 m/s 1 pt

1. Par un calcul rapide, évaluer quelle doit être la vitesse d'un jet d'eau de diamètre $d = 5\ cm$ impactant verticalement un solide de masse $m = 1\ kg$ pour que ce dernier parvienne à s'immobiliser dans l'air ? Vous pourrez exploiter le théorème d'Euler sans pour autant détailler sa mise en oeuvre.



3 pts

L'action d'un jet est de la forme $\rho V^2 S$. 1 pt

On veut donc $F = \rho V^2 S = mg$ et

donc $V = \sqrt{\frac{mg}{\rho S}} = \sqrt{\frac{mg4}{\rho \pi d^2}} = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{mg}{\rho \pi}} =$ 1 pt

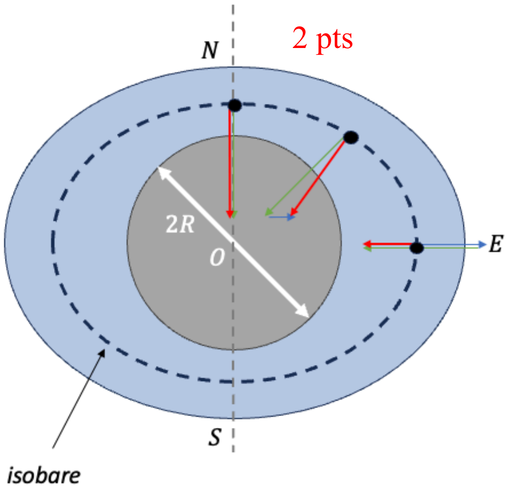
$2.23\ m/s$ 1 pt

Statique : Effet de l'inertie sur le niveau de la mer

Considérons la planète Terre totalement recouverte d'eau. Cette dernière, de rayon R, de masse M_t et de centre O tourne autour de son axe pôle nord – pôle sud avec une vitesse angulaire ω. Le référentiel lié à cette planète n'est donc pas galiléen et il convient de considérer une force d'inertie d'entrainement à tout bilan de force effectué dans ce référentiel. Cette force, exprimée par unité de masse, s'écrit $\overrightarrow{f_{vi}} = \omega^2 \overrightarrow{HM}$ où M est le point matériel étudié et H son projeté orthogonal sur l'axe formé par les pôles. Cette force est à l'origine d'une non-sphéricité de la répartition de la masse d'eau autour de la planète que nous souhaitons étudier dans ce problème, à l'état stationnaire.

4 pts

1. Dresser le bilan des forces de volume (en N/kg) s'exerçant sur une particule fluide au sein du référentiel lié à la planète. En plus de la force d'inertie donnée dans l'énoncé, vous expliciterez la force de gravitation exercée par la Terre en fonction de la constante universelle G et la masse de la planète M_t. Rappeler le théorème fondamental de la statique des fluides et discuter de ce qu'il impose graphiquement aux vecteurs résultants. Reporter sur la figure ci-dessous de différentes couleurs les forces ainsi que leurs résultantes sur les 3 points repérés, placés le long d'une isobare représentée en traits pointillés dans le plan de coupe ci-dessous.



2 pts

Bilan des forces

$$\vec{f_{vg}} = -GM_t\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

$$\vec{f_{vi}} = \omega^2\overrightarrow{HM}$$

$$\vec{R_v} = \vec{f_{vg}} + \vec{f_{vi}}$$

Discussion

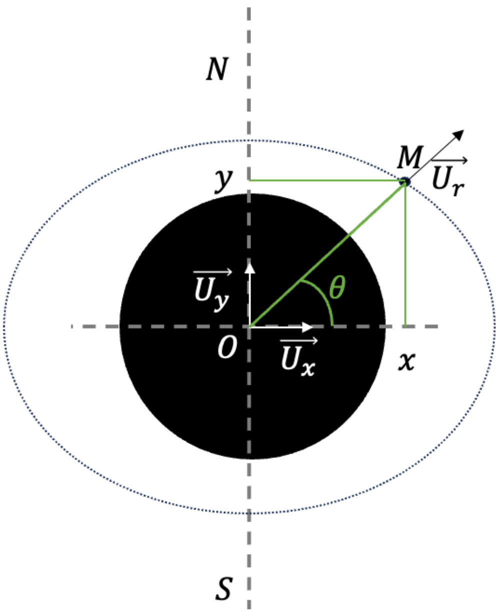
1 pt

Le PFS $\rho(\vec{f_{vg}} + \vec{f_{vi}}) = \overrightarrow{grad}(P)$ indique que la résultante des forces de volume doit être orthogonale aux isobars et donc à la ligne en pointillés.

1 pt

2. Exprimer, si ce n'est pas déjà fait, ces forces de volume par unité de masse **uniquement en fonction de x et de y** et des vecteurs $\vec{U_x}$ et $\vec{U_y}$ (voir ci-dessous).

2 pts



$$\vec{f_{vg}} = -GM_t\frac{\overbrace{cos(\theta)}^{x/\sqrt{x^2+y^2}}\ \vec{U_x} + \overbrace{sin(\theta)}^{y/\sqrt{x^2+y^2}}\ \vec{U_x}}{x^2+y^2}$$

$$\vec{f_{vg}} = -GM_t\frac{x\vec{U_x} + y\vec{U_x}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$ 1 pt

$$\vec{f_{vi}} = x\omega^2\vec{U_x}$$ 1 pt

3. Proposer une expression analytique du champ de pression respectant le principe fondamental de la statique des fluides dans le plan de la figure, en fonction des coordonnées x et y.

2 pts

$$\left|\begin{array}{l}\frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y}\end{array}\right. = \left|\begin{array}{l}\rho x\omega^2 - \frac{\rho G M_t x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ -\frac{\rho G M_t y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\end{array}\right. \leftrightarrow P = \frac{\rho(x\omega)^2}{2} + \rho G M_t (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} + C$$

On se place à la surface de l'océan. On notera h_p la profondeur de l'océan aux pôles $(ON = R + h_p)$ et h_e la profondeur au niveau de l'équateur $(OE = R + h_e)$. On fera l'hypothèse h_p et h_e sont bien inférieurs à R de sorte que la linéarisation suivante puisse être appliquée : $\left(1+\frac{h}{R}\right)^n \approx 1 + \frac{nh}{R}$.

4. Montrer que $h_e - h_p = \alpha\left(\frac{R}{2} + h_e\right)$ avec α une grandeur sans dimension que vous expliciterez en fonction de ω, R, M_t et G. Que représente α ?

4 pts

A l'interface, P=P_0, on a donc $P_0 - C = \frac{\rho(x\omega)^2}{2} + \rho G M_t (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$, que l'on égalise aux pôles et à l'équateur :

$$\rho G M_t (R+h_p)^{-1} = \frac{\omega^2 \rho (R+h_e)^2}{2} + \rho G M_t (R+h_e)^{-1} \quad \text{1 pt}$$

$$\rho G M_t R^{-1}\left(1+\frac{h_p}{R}\right)^{-1} = \frac{\omega^2 \rho R^2}{2}\left(1+\frac{h_e}{R}\right)^2 + \rho G M_t R^{-1}\left(1+\frac{h_e}{R}\right)^{-1}$$

$$\rho G M_t R^{-1}\left(1-\frac{h_p}{R}\right) = \frac{\omega^2 \rho R^2}{2}\left(1+2\frac{h_e}{R}\right) + \rho G M_t R^{-1}\left(1-\frac{h_e}{R}\right)$$

$$1 - \frac{h_p}{R} = \frac{\omega^2 R^3}{2 G M_t}\left(1+2\frac{h_e}{R}\right) + 1 - \frac{h_e}{R}$$

$$\frac{h_e - h_p}{\frac{R}{2} + h_e} = \frac{\omega^2 R^3}{G M_t} = \alpha \quad \text{2 pts}$$

α et le rapport entre la force d'inertie (ou centrifuge) et la pesanteur. 1 pt

5. Sachant que la Terre effectue 1 tour sur elle-même en 24h, que la profondeur moyenne des océans est négligeable devant $R/2$, évaluer, selon ce modèle, analytiquement puis numériquement la dénivellation des océans entre leurs profondeurs prises respectivement à l'équateur et aux pôles ? On rappelle que $R = 6378$ km, $M_t = 5.972 \times 10^{24}$ kg et $G = 6.67 \times 10^{-11}\ SI$.

2 pts

Avec $h_e \ll \frac{R}{2}$, on a

$$h_e - h_p \approx \frac{R\alpha}{2}$$

$Avec\ \alpha = \frac{\omega^2 R^3}{G M_t} = \left(\frac{2\times 3.14}{24\times 3600}\right)^2 \frac{(6378000)^3}{6.67\times 10^{-11}\times 5.972\times 10^{24}} = 0.00344\ et$

$$h_e - h_p \approx \frac{R\alpha}{2} = \frac{6378000}{2} \times 0.00344 = 11\ km$$

C'est très élevé, cela correspond à la fosse des Mariannes. Remarques, la terre est-elle même déformée par l'inertie, ce qui n'est pas considéré dans ce problème, l'eau ne recouvre pas l'intégralité du globe, les mers ne sont pas statiques et les effets de densité et de températures variables peuvent jouer un rôle….