Sont admis les tables statistiques, le formulaire manuscrit (20 pages RV) et la calculatrice personnels

<u>Exercice 1</u> :

Une enquête sur le <u>*Revenu*</u> des ingénieurs informaticiens a donné les résultats suivants :

Classe (k)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Revenu mensuel (euros)	1250-1750	1750-2250	2250-2750	2750-3250	3250-3750	3750-4250	4250-4750	4750-5250	5250-5750
Effectif (n_k)	28	20	14	11	8	7	5	4	3
Effectif cumulé (N_k)									
Centre classes (r_k)									
Amplitude classe (a_k)									

1.1) **(1p)** On considère que le <u>*revenu*</u> des ingénieurs informaticiens peut-être modélisé par une <u>*variable aléatoire continue*</u> R. Compléter le **tableau statistique.** Tracer l'**histogramme** et la **fonction de répartition** correspondantes.

1.2) **(1p)** Déterminer la *tendance centrale* de la v.a. R sur l'échantillon donné par : le **mode**, la valeur de la **médiane** et la réalisation de la **moyenne empirique. Comparer** ces valeurs et conclure.

Un test d'adéquation a permis de montrer que le <u>*revenu*</u> des ingénieurs informaticiens peut être modélisé par une variable aléatoire continue R suivant une loi de Pareto, dont la <u>*densité de probabilité*</u> – pour un revenu r – est la suivante :

$f_R(r) = \frac{ba^b}{r^{b+1}}, si\, r \geq a\,; o\, sinon$ où r est le centre des classes <u>*revenu*</u>.

1.3) **(2p)** Déterminer pour b fixé, l'estimateur $\hat{a}_{MV}$ du <u>*maximum de vraisemblance*</u> de a. Est-ce qu'il est <u>*efficace*</u>? Motiver votre réponse. Déduire la <u>*signification*</u> du paramètre a.

1.4) **(2p)** Déterminer pour a fixé, l'estimateur $\hat{b}_{MV}$ maximum de vraisemblance du paramètre b. Calculer sa réalisation sur l'échantillon donné pour a estimé à 1500.

1.5) **(2p)** En supposant que la fonction pivotale $\frac{2nb}{\hat{b}}$ suit la loi pivot χ^2_{2n} donner l'*intervalle de confiance bilatéral symétrique* de b au niveau de confiance $1-\alpha=0{,}95$.

Considérer la relation suivante entre fractiles : $\sqrt{2\chi^2_{p;\alpha}}-\sqrt{p-1}\approx n_\alpha$ où $\chi^2_{p;\alpha}$ est la fractile d'ordre α de la loi de Khi 2 à p degrés de liberté et n_α est la fractile d'ordre α de la loi normale centrée et réduite.

Exercice 2 :

Le tableau suivant donne les *revenus* (en euros) d'un échantillon de n=7 ingénieurs informaticiens choisis au hasard dans une population donnée avant et après un événement.

Individu (k)	1	2	3	4	5	6	7
X : Revenu avant en euros	2850	2380	2930	2860	2320	2740	2470
Y : Revenu après en euros	2750	2360	2950 30	2830	2250	2690	2410
D=X-Y							

2.1) **(2p)** Soit R la variable aléatoire *revenu* et Z une variable aléatoire qualitative à 2 modalités : *avant et après l'événement*. Calculer la *variance de R expliquée par Z* notée S_E^2, puis le *rapport de corrélation* $S_{R/Z}$. Est-ce que événement a eu une influence sur le revenu des informaticiens ?

2.2) **(2p)** D'après les économistes, les revenus auraient baissés après l'événement. *Tester cette hypothèse* sur échantillon donné avec un niveau de signification $1-\alpha=0{,}95$. Conclure.

Exercice 3 :

L'instant T de panne d'un appareil est une variable aléatoire obéissant à une loi exponentielle de paramètre $\mu>0$: $f(t)=\frac{1}{\mu}e^{\frac{-t}{\mu}}$ avec $t>0$. On met n=225 appareils en service durant un temps $\tau=500$ heures et on compte le nombre d'appareils en panne à l'issue de cette période τ.

3.1) **(1p)** Calculer la *probabilité* p pour qu'un appareil tombe en panne entre les instants 0 et τ.

3.2) **(1p)** Soit X, le nombre d'appareils en panne avant τ, sur les n qui avaient été mis en service. Donner la loi de X.

3.3) On suppose que le temps moyen de fonctionnement sans panne de ce type d'appareil est inférieur à 750 heures. On se propose de *tester cette hypothèse* avec une erreur grave maximum fixée à $\alpha^*=0{,}05$ et un temps de panne moyen sur l'échantillon donné égal à $\bar{t}=812$.

(1p) Les hypothèses de test sur le paramètre p de la loi de X peuvent s'écrire : $H_0 : p \geq p_0 \quad H_1 : p < p_0$. Que vaut p_0 ?

3.4) **(2p)** Supposons que la famille de la loi de distribution de probabilité de X est à *rapport de vraisemblance monotone*. Proposer une *règle de décision* en utilisant l'estimateur $\hat{p}_m$ du paramètre p de la loi de X obtenu par la méthode des moments avec une erreur de première espèce maximum α^* fixée à 0,05. *Décider*.

Nota : Considérer que pour n grand, la loi de X converge vers une loi normale $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ dont vous donnerez les valeurs des paramètres en fonction de p_0 et n, sous H_0.

3.6) **(2p)** Calculer la *puissance du test* si le temps moyen de bon fonctionnement est de 900 heures. Conclure.

Exercice 4 :

Répondre à au moins une des deux questions liées aux projets. La deuxième sera du bonus !

4.1) **(1p)** Quel est l'objectif de la *simulation des lois de densité* usuelles ? A partir de *quel type de données* peut-on réaliser cette simulation ?

4.2) **(1p)** Donner quelques *exemples de modélisation* avec la loi de Pareto.