Examen en Statistiques 2017-2018

3 H

Sont admis les tables statistiques, le formulaire manuscrit (10 pages RV) et la calculatrice personnels

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité $f_X(x)=a^2 x e^{-ax}$ avec $x, a>0$. On dispose d'un échantillon i. i. d. X1, …, Xn de taille n=100 avec les caractéristiques suivantes : $\sum_{i=1}^{100} x_i=398$ et $\sum_{i=1}^{100} x_i^2=2520$.

1.1) Déterminer $\hat{a}_{MV}$ l'estimateur du *maximum de vraisemblance* de *a*. Est-ce qu'il existe un *estimateur efficace* de a ? Motiver votre réponse.

1.2) Quelle est la *borne de Cramer-Rao* associée à *a* ? Que *représente*-elle ?

1.3) A partir des *propriétés asymptotiques* de l'estimateur $\hat{a}_{MV}$, donner sa *loi de distribution de probabilité* et préciser l'*expression de ses paramètres*.

1.4) En utilisant $\hat{a}_{MV}$, donner un *intervalle de confiance bilatéral symétrique* de *a* au niveau de confiance.

1.5) Calculer numériquement les *réalisations* correspondantes de $\hat{a}_{MV}$ et l'*intervalle de confiance* bilatéral symétrique sur *a*, au niveau de confiance 95%

1.5) Montrer que l'on peut trouver un autre estimateur $\hat{a}_m$ de *a* par la *méthode des moments*. Calculer l'*estimation* de *a* correspondante.

Exercice 2 :

L'instant T de panne d'un appareil est une variable aléatoire obéissant à une loi exponentielle de paramètre $\mu>0$: $f(t)=\frac{1}{\mu}e^{\frac{-t}{\mu}}$ avec $t,\mu>0$. On met n=225 appareils en service à la même date t_0 et on note T_i l'instant de panne de l'appareil i.

On suppose que le temps moyen de fonctionnement sans panne de ce type d'appareil est inférieur à $\mu_0=750$ heures. On souhaite tester cette hypothèse : $H_0:\mu\leqslant\mu_0;H_1:\mu>\mu_0$

2.1) Montrer que la famille de la loi de distribution est à *rapport de vraisemblance monotone*. Est-ce que le test est *uniformément plus puissant* (UPP) ? Motiver votre réponse.

2.2) Proposer une *règle de décision* en utilisant l'estimateur $\hat{\mu}_m$ obtenu par la méthode des moments avec une erreur de première espèce maximum fixée à $\alpha=0{,}05$. *Décider.*

2.3) Calculer la *puissance du test* si le temps de bon fonctionnement est de 900 heures. Conclure.

Nom : **Prénom :**

Exercice 3 :

On cherche à se convaincre que le fait d'ajouter un additif à l'essence fait baisser la consommation. Pour ce faire on a réalisé des mesures de consommation sur 8 véhicules pris au hasard. Sur chacun des véhicules 2 mesures ont été effectués, l'une avec additif, noté X, et l'autre sans additif, notée Y. On note D la différence Y-X.

Avec additif	v.a. X	7,5	4,5	13,4	14,3	6,5	4,8	5,7	4,9
Sans additif	v.a. Y	7,4	4,6	13,6	14,1	6,6	4,8	5,9	5,7
Différence D	Y-X								
Différence centrée réduite	D*								

Première partie

3.1) Calculer pour la variable aléatoire D (à partir des échantillons donnés ci-dessus), l'*estimation de la moyenne empirique* $\bar{d}$ et l'*estimation de sa variance empirique* s^{*2}.

3.2) Vérifier que l'*hypothèse de normalité* ne peut pas être retenue pour la v.a. D représentant la différence de consommation avec une erreur grave fixée $\alpha=0{,}05$.

Nota : Puisque les paramètres de la loi D doivent être estimés, il faut corriger la variable de décision du *test de Kolmogorof-Smirnov* à savoir $D_n^c=(\sqrt{(n)}+\frac{0{,}85}{\sqrt{(n)}})D_n$. Pour faire le test K-S corrigé passer par la variable aléatoire D* représentant les différences centrées et réduites.

Deuxième partie

3.3) *Tester* avec une erreur grave fixée à $\alpha=0{,}05$ les *deux hypothèses suivantes* : H0 : l'additif n'a pas d'effet ; H1 : l'additif est efficace.

3.4) Quel est le *risque de seconde espèce* β si l'on admet que 75 % des véhicules voient leur consommation diminuer lorsqu'ils utilisent un additif ?

Responsable : Alexandrina Rogozan