Correction de l'IS de P1-1 du 25 avril 2025

Exercice 1 : Un cow-boy fatigué

1 Etude du café

1) Incompressible : Le volume de la phase condensée ne dépend pas de la pression.

Indilatable : Le volume de la phase condensée ne dépend pas de la température.

Équation d'état : V =constante

On a $C_V = C_P = C$.

2) Par définition de la masse volumique $m_c = \rho_c V_c = 0,300$ kg.

3) Le café étant une phase condensée incompressible et indilatable, on a $dU = m_c c_c dT$.

Or c_c ne dépend pas de T.

On a donc $\Delta U = m_c c_c(\theta_f - \theta_i)$.

4) D'après le premier principe, on a $\Delta U = W + Q_c$.

or $\delta W = -P_{ext}dV = 0$ car V est constant.

Donc $W = 0$.

Donc $Q_c = \Delta U = m_c c_c(\theta_f - \theta_i) = -37,6$ kJ.

2 Première stratégie : attendre que le café refroidisse

5) La transformation est lente et isobare.

6) D'après la loi des gaz parfaits, l'air étant un gaz, $n = \frac{P_0 V_0}{RT_0} = 4,0.10^3$ mol.

7) L'air n'échange de l'énergie qu'avec le café.

Le transfert thermique reçu par l'air est donc le transfert thermique fourni par le café, donc $Q_a = -Q_c = 37,6$ kJ.

La transformation est isobare donc $\Delta H = Q_a = 37,6$ kJ.

8) L'air se comporte comme un gaz parfait, il suit donc la seconde loi de Joule.

Donc $\Delta H = C_P(T_a - T_0) = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}(T_a - T_0)$.

Donc $T_a = \frac{\gamma-1}{nR\gamma}\Delta H + T_0 = 300,3$ K.

La température de l'air change très peu suite au refroidissement du café. Il se comporte comme un thermostat.

9) L'air suit la première loi de Joule.

Donc $\Delta U = C_V(T_a - T_0)$.

Finalement $\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1}(T_a - T_0) = 26,87$ kJ.

D'après le premier principe, $W = \Delta U - Q = -10,7$ kJ.

10) $\delta W = -P_{ext}dV = -P_0 dV$ car la transformation est isobare.

Donc $W = -P_0(V_f - V_i)$.

Finalement $V_f = -\frac{W}{P_0} + V_0 = 100,1\ \mathrm{m}^3$.

La variation de volume de l'air est négligeable.

3 Deuxième stratégie : souffler sur le café

11) La première identité thermodynamique s'écrit : $dU = TdS - PdV$, ce qui donne donc $dS = \dfrac{dU}{T} + \dfrac{P}{T}dV$

Or pour le café, $dV = 0$, donc $dS = \dfrac{m_c c_c}{T}dT$.

Par intégration, on obtient : $\Delta S = m_c c_c \ln\left(\dfrac{T_f}{T_i}\right)$ et donc $\Delta S = m_c c_c \ln\left(\dfrac{\theta_f + 273,15}{\theta_i + 273,15}\right)$

AN : $\Delta S = 0,300 \times 4,18 \times 10^3 \times \ln\left(\dfrac{273,15+60}{273,15+90}\right)$ ce qui donne $\Delta S = -108\ \mathrm{J.K^{-1}}$

12) On a $S^{ech} = \dfrac{Q_c}{T_{ext}} = \dfrac{Q_c}{T_0}$

On trouve $S^{ech} = -125 \text{ J.K}^{-1}$

13) D'après le second principe de la thermodynamique, $S^{cr} = \Delta S - S^{ech}$, et on trouve $S^{cr} = 17 \text{ J.K}^{-1}$
La transformation est **irréversible**, ce qui est cohérent, la transformation inverse semblant très irréaliste.

Exercice 2 : Détente adiabatique dans l'atmosphère

1) D'après la loi des gaz parfaits, $P\,V = n\,R\,T$. De plus, $\rho = \frac{m}{V}$ et $m = n\,M$.

On en déduit, $P\frac{m}{\rho} = \frac{m}{M} R\,T$, ce qui donne $\rho = \dfrac{P\,M}{R\,T}$.

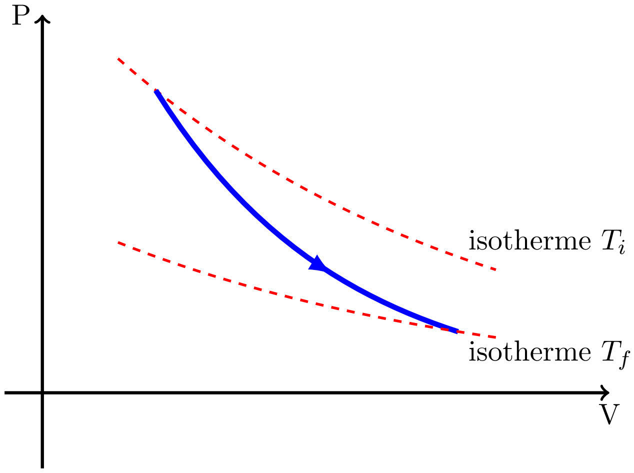
Application numérique: $\rho = 1,21 \text{ kg.m}^{-3}$

2) On a $\ln\rho = \ln m - \ln V$. On en prend la différentielle: $\mathrm{d}\left(\ln\rho\right) = \mathrm{d}\left(\ln m\right) - \mathrm{d}\left(\ln V\right)$. Comme m est constante, $\mathrm{d}\left(\ln m\right) = 0$ et on trouve le résultat demandé: $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\dfrac{\mathrm{d}V}{V}$.

Autre méthode:
On a $\mathrm{d}\rho = m\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right)$ car m est constante.

On a donc $\mathrm{d}\rho = -m\dfrac{\mathrm{d}V}{V^2}$ et on trouve le résultat demandé: $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\dfrac{\mathrm{d}V}{V}$.

3a) La transformation adiabatique apparait en bleu trait plein. C'est une détente, la pression diminue et le volume augmente.



3b) On écrit le premier principe pour une transformation infinitésimale: $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$.
La transformation étant adiabatique on a $\delta Q = 0$.
La transformation étant lente, on a $P_{ext} = P$, d'où $\delta W = -P_{ext}\mathrm{d}V = -P\mathrm{d}V$.
Un gaz parfait suit la première loi de Joule et $C_v = \frac{nR}{\gamma-1}$ pour un gaz parfait, ce qui donne $\mathrm{d}U = \frac{nR}{\gamma-1}\mathrm{dT}$.

Le premier principe de réécrit: $\dfrac{nR}{\gamma-1}\mathrm{dT} = -P\mathrm{d}V = P\,V\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$ d'après la question 2).

donc $\dfrac{\mathrm{dT}}{T} = \dfrac{P\,V}{n\,R\,T}(\gamma-1)\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = (\gamma-1)\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$

On intègre: $\ln T = (\gamma-1)\ln\rho + K$ avec K une constante.
d'où $\ln T + (1-\gamma)\ln\rho = K$
d'où $\ln(T\rho^{1-\gamma}) = K$.
On en déduit le résultat demandé: $T\rho^{1-\gamma} = \textit{constante}$.

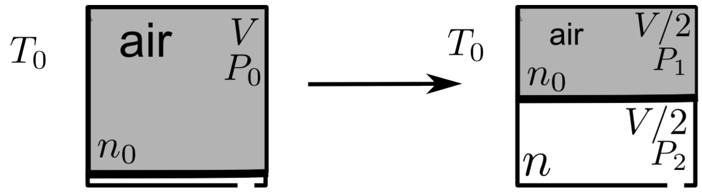
3c) On a donc $T_i\rho_i^{1-\gamma} = T_f\rho_f^{1-\gamma}$.

Donc $\rho_f = \rho_i\left(\frac{T_i}{T_f}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$.

Application numérique: $\rho = 1,11$ kg.m^{-3}

On a $P_f = \frac{RT_f \rho_f}{M}$.
Application numérique: $\rho = 0,88$ bar

Exercice 3 : Injection d'air sous un piston



• **Pour le gaz situé au dessus du piston**, qui subit une transformation **isotherme** :
Soit P_1 la pression finale du gaz situé au dessus du piston (compartiment du haut)
Equation d'état du gaz parfait (état initial) : $P_0 V = n_0 R T_0$ **(1)**
Equation d'état du gaz parfait (état final) : $P_1 \dfrac{V}{2} = n_0 R T_0$ **(2)**

• **Pour le gaz situé sous le piston**, qui subit également une transformation **isotherme** :
Soit P_2 la pression finale du gaz situé au dessus du piston (compartiment du haut)
Equation d'état du gaz parfait (état final) : $P_2 \dfrac{V}{2} = n R T_0$ **(3)**

• Equilibre mécanique du piston :
A l'équilibre thermodynamique final, nous devons prendre en compte trois forces sur le piston :
→ la force pressante liée à la pression du gaz dans la partie supérieure,
→ la force pressante liée à la pression du gaz situé sous le piston
→ le poids du piston, ce qui conduit à $P_2 = P_1 + \dfrac{mg}{\mathcal{S}}$ **(4)**

(3)/**(2)** donne : $\dfrac{n}{n_0} = \dfrac{P_2}{2P_0} = \dfrac{P_1 + \dfrac{mg}{\mathcal{S}}}{2P_0}$ grâce à **(4)**

Or **(2)**/**(1)** donne $P_0 = \dfrac{P_1}{2}$

Ainsi $n = n_0 \left(2P_0 + \dfrac{mg}{\mathcal{S}}\right) \times \dfrac{1}{2P_0}$ et finalement $n = n_0 \left(1 + \dfrac{mg}{2P_0 \mathcal{S}}\right)$

Analyse dimensionnelle :

$$\left[n_0 \left(1 + \frac{mg}{2P_0 \mathcal{S}}\right)\right] = [n] \times \frac{[F]}{[P\mathcal{S}]} = [n] \times \frac{[F]}{[F]} = [n]$$

Le résultat est donc homogène.