UV Statistique pour l'Ingénieur

Cours n° 11-12

Tests séquentiels vs. non séquentiels

Comparaison de deux échantillons

Test d'adéquation, ...

A. ROGOZAN

Tests séquentiels *vs* tests non-séquentiels

- Exemple :
  - « Soit un nouveau lot de pièces d'une société qui a toujours donné satisfaction jusque là. Allons-nous accepter ce lot de nouveau, ou bien le rejeter ? »
- Test Non-Séquentiel :
  - Tirer du lot un échantillon de taille n fixée a priori.
  - En notant p la proportion de défectueux, se pose le pb. de faire le test suivant avec α (erreur grave) fixé :

$$\left\{\begin{array}{c} H_0 : p = p_0 (HS) \\ H_1 : p = p_1 (p_1 > p_0)(HS) \end{array}\right\}$$

- Nb : utilisation d'une v.a. X~B(n, p) où n fixé a priori

Tests séquentiels *vs* tests non-séquentiels

- Exemple :
  - « Soit un nouveau lot de pièces d'une société qui a toujours donné satisfaction jusque là. Allons-nous accepter ce lot de nouveau, ou bien le rejeter ? »

- Test Séquentiel : (pour économiser des analyses)
  - Tirer du lot une pièce
  - Regarder si la pièce tirée est bonne ou défectueuse
  - Décider :

    - soit d'accepter le lot (accepter H_0)

    - soit de refuser le lot (rejeter H_0)

    - soit de tirer une nouvelle pièce ($n \leftarrow n+1$)

Tests séquentiels *vs* tests non-séquentiels

- Exemple :
  - Traitement séquentiel des signaux RADAR pour détecter les cibles ennemies.
  - Taille d'échantillon = Temps d'observation/Période d'acquisition
  - « cible mobile amie (H0) ; cible mobile ennemie (H1) »
- Test Séquentiel :
  - Détecter une cible mobile
  - Regarder si la cible est amie ou ennemie
  - Décider :
    - soit de protéger la cible (accepter H0)
    - soit de détruire la cible (rejeter H0)
    - soit de continuer à l'observer ($t \leftarrow t+1$)

Tests séquentiels (Wald, 1943)

- Exemple :
  - en notant p la proportion de défectueux, faire le test suivant avec α (risque de 1ère espèce) et β (risque de 2ème espèce) fixés :

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \, (HS) \\ H_1 : p = p_1 \, (p_1 > p_0) \, (HS) \end{cases}$$

  - sachant que $X_i \sim B(1,p)$, tirer la i-ème pièce et calculer :

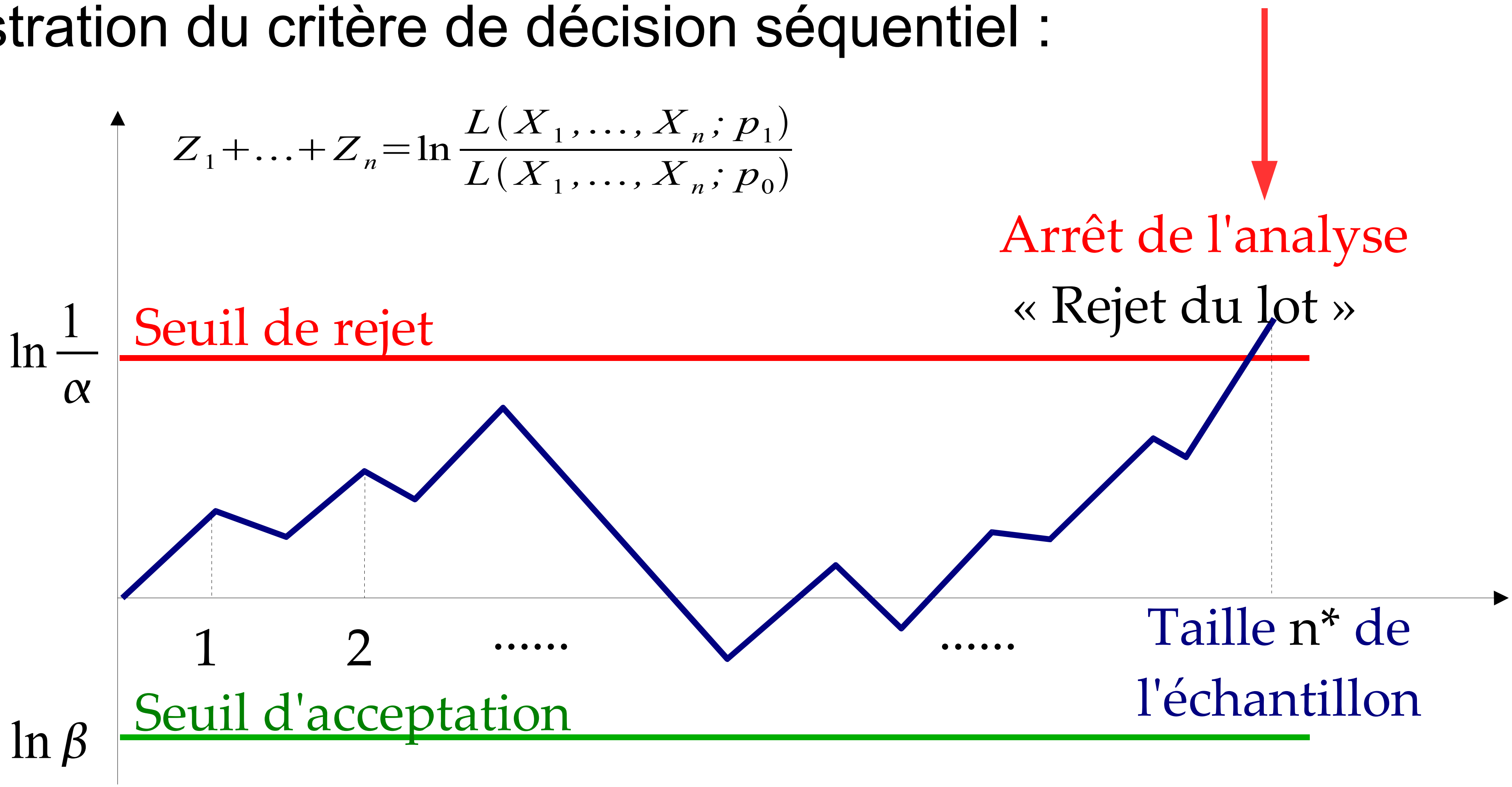
$$Z_i = \ln \frac{L(X_i, p_1)}{L(X_i, p_0)} = X_i \ln \frac{p_1}{p_0} + (1 - X_i) \ln \frac{(1-p_1)}{(1-p_0)}$$

  - règle de décision :

$$\begin{cases} Si\ Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n \geqslant \ln \frac{1}{\alpha}\ alors\ rejeter\ le\ lot \\ Si\ Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n \leqslant \ln \beta\ alors\ accepter\ le\ lot \\ Sinon \quad tirer\ une\ autre\ pièce \end{cases}$$

Tests séquentiels (Wald, 1943)

- Illustration du critère de décision séquentiel :



Comparaison de deux échantillons

- Problème : Comparer le comportement de 2 (ou plusieurs) populations vis à vis d'un certain phénomène mesurable
- Méthode :
  - Associer à chaque population une v.a.
  - Tirer un échantillon de chacune des populations
  - Déterminer (à partir des échantillons tirés) si les v.a. ont la même distribution

Classification des méthodes de comparaison de deux échantillons

- Échantillons non-appariés
  - Cas des échantillons gaussiens :

    1) Test de Fisher (d'égalité des variances)

    Si réussite :

    2) Test de Student (d'égalité des moyennes)

    Si échec : échantillons issus de distributions différentes

  - Cas des échantillons issus des distributions inconnues :

    Test non-paramétrique de Wilcoxon (de rang)

- Échantillons appariés
  - Test non-paramétrique du signe

Loi de Fisher

- Si des v.a. V_1 et V_2 indépendantes et de loi de probabilités $\chi^2_{p_1}$ et $\chi^2_{p_2}$ alors $\dfrac{\frac{V_1}{p_1}}{\frac{V_2}{p_2}} \sim F_{p_1, p_2}$ (loi de Fisher à p_1 et p_2 degrés de liberté)

  - Propriété des fractiles : $f_{p_1, p_2; \alpha} = \dfrac{1}{f_{p_2, p_1; 1-\alpha}}$

Test de Fisher (d'égalité des variances)

- Comparaison de 2 échantillons gaussiens :
  $X_1, \ldots, X_n$ avec $X \sim N(\mu_X, \sigma^2_X)$ et $Y_1, \ldots, Y_m$ avec $Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2_Y)$

- Test bilatéral : $\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \sigma^2_X = \sigma^2_Y (HC) \\ H_1 : \sigma^2_X \neq \sigma^2_Y (HC) \end{array} \right\}$

  - Variables de décision : $S^{*2}_X \sim \chi^2_{n-1}, \quad S^{*2}_Y \sim \chi^2_{m-1} \quad et \quad \dfrac{S^{*2}_X}{S^{*2}_Y}$

  - Fonction pivotale sous H_0 suit une loi de Fisher :

$$\frac{S^{*2}_X}{S^{*2}_Y} \sim F_{n-1,\, m-1}$$

Test de Fisher (d'égalité des variances)

- Comparaison de 2 échantillons gaussiens :
  $X_1, \ldots, X_n$ avec $X \sim N(\mu_X, \sigma^2_X)$ et $Y_1, \ldots, Y_m$ avec $Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2_Y)$
- Test bilatéral : $\begin{cases} H_0 : \sigma^2_X = \sigma^2_Y \, (HC) \\ H_1 : \sigma^2_X \neq \sigma^2_Y \, (HC) \end{cases}$

  - Région critique : $W = \left\{ \frac{S^{*2}_X}{S^{*2}_Y} < A \right\} \cup \left\{ \frac{S^{*2}_X}{S^{*2}_Y} > B \right\} avec\ A < 1 < B$
  - Seuils = fractiles de la loi de Fisher

$$A = f_{n-1,\, m-1\ ;\, \frac{\alpha}{2}} \qquad B = f_{n-1,\, m-1\ ;\, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

Test de Fisher (d'égalité des variances)

- Comparaison de 2 échantillons gaussiens :
  $X_1, \ldots, X_n$ avec $X \sim N(\mu_X, \sigma^2_X)$ et $Y_1, \ldots, Y_m$ avec $Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2_Y)$

- Test unilatéral : $\begin{Bmatrix} H_0 : \sigma^2_X = \sigma^2_Y \, (HC) \\ H_1 : \sigma^2_X < \sigma^2_Y \, (resp.\ \sigma^2_X > \sigma^2_Y)\,(HC) \end{Bmatrix}$

  - Région critique : $\dfrac{S^{*2}_X}{S^{*2}_Y} < f_{n-1,\, m-1\, ;\alpha} \left(resp.\ \dfrac{S^{*2}_X}{S^{*2}_Y} > f_{n-1,\, m-1\, ;1-\alpha} \right)$

    Fractiles de la loi de Fisher

Estimation sur deux populations gaussiennes de même variance

- Si le test de Fisher réussit ... comment bien estimer σ^2 ?
- Soit 2 échantillons non-appariés gaussiens de même variance *inconnue* :

  $X_1, \ldots, X_n$ avec $X \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ et $Y_1, \ldots, Y_m$ avec $Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$
- Montrer que :

$$S^{*2} = \frac{1}{N-2}\left\{(n-1)S_X^{*2} + (m-1)S_Y^{*2}\right\} \quad où \quad N = n+m$$

est un estimateur sans biais de la variance σ^2.

Test de Student (d'égalité des moyennes)

- Soit 2 échantillons gaussiens de même variance *inconnue* :
  $X_1, \ldots, X_n$ avec $X \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ et $Y_1, \ldots, Y_m$ avec $Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$
- Test bilatéral : $\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \, (HC) \\ H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \, (HC) \end{cases}$
  - Variables de décision : $\overline{X}, \overline{Y}$ et $\overline{X} - \overline{Y}$
  - Fonction pivotale sous H_0 suit une loi de Student (N=n+m)

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S^* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim \tau_{N-2}$$

Test de Student (d'égalité des moyennes)

- Soit 2 échantillons gaussiens de même variance *inconnue* :
  $X_1, \dots, X_n$ avec $X \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ et $Y_1, \dots, Y_m$ avec $Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$
- Test bilatéral : $\begin{cases} H_0 : \mu_X = \mu_Y \,(HC) \\ H_1 : \mu_X \neq \mu_Y \,(HC) \end{cases}$

  - Région critique avec N=n+m :

Fractiles de la loi de Student

$$W = \left\{ \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S^* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} < t_{N-2\,;\,\frac{\alpha}{2}} \right\} \cup \left\{ \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S^* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} > t_{N-2\,;\,1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

Test *non-paramétrique* de Wilcoxon (de rang)

- Comparaison de 2 échantillons $X_1, \ldots, X_n$ et $Y_1, \ldots, Y_m$ de lois de probabilités X et Y inconnues :
- Test unilatéral : $\begin{cases} H_0 : F_X = F_Y \\ H_1 : F_X > F_Y \ (ou\ F_X < F_Y\ ou\ F_X \neq F_Y) \end{cases}$

$F_X > F_Y$ => v.a. X stochastiquement < v.a Y

- Ordonner de manière croissante le mélange des deux échantillons : $Y_{(1)} < X_{(2)} < Y_{(3)} < \ldots Y_{(i)} < \ldots < X_{(n+m)}$
  - rang des Y 1 3 i
  - rang des X 2 n+m
- Variable de décision : $W_X = \sum (rangs\ des\ X)$

Test *non-paramétrique* de Wilcoxon (de rang)

- Comparaison de 2 échantillons $X_1, \ldots, X_n$ et $Y_1, \ldots, Y_m$ de lois de probabilités X et Y inconnues :
- Test unilatéral : $\begin{Bmatrix} H_0 : F_X = F_Y \\ H_1 : F_X > F_Y (ou\ F_X < F_Y\ ou\ F_X \neq F_Y) \end{Bmatrix}$

  - Variable de décision : $W_X = \sum (rangs\ des\ X)$
  - Fonction pivotale sous H_0 suit asympt. une loi normale :

$$W_X \rightarrow N(\mu_W = \frac{n(n+m+1)}{2}, \sigma_W^2 = \frac{nm(n+m+1)}{12})$$

Test *non-paramétrique* de Wilcoxon (de rang)

- Comparaison de 2 échantillons $X_1, \ldots, X_n$ et $Y_1, \ldots, Y_m$ de lois de probabilités X et Y inconnues :
- Test unilatéral : $\begin{cases} H_0 : F_X = F_Y \\ H_1 : F_X > F_Y \end{cases}$

X<Y

- Région critique : $$W_X < \frac{n(n+m+1)}{2} - n_{1-\alpha}\sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}$$

Fractiles de la loi normale centrée réduite

- Remarque : Si rangs égaux, attribuer à chacun un rang moyen.

Test du signe (Arbutnott, 1710)

- Comparaison de 2 échantillons appariés $(X_1,Y_1)\dots(X_n,Y_n)$ de lois de probabilités X et Y inconnues
- Variable de décision = différence des v.a. D = Y -X
  - Statistique Z = nb. de fois où D > 0 => Z~B(n,p)

$$\begin{cases} H_0 : p = \frac{1}{2} \\ H_1 : p > \frac{1}{2} \left(ou\ p < \frac{1}{2},\ ou\ p \neq \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

  - Fonction pivotale sous H_0 suit une loi Binomiale :

$$Z \sim B(n, p = 0{,}5)$$

Test du signe (Arbutnott, 1710)

- Comparaison de 2 échantillons appariés $(X_1,Y_1)\dots(X_n,Y_n)$ de lois de probabilités X et Y inconnues
- Variable de décision : Z = nb. de fois où D > 0

$$\begin{cases} H_0 : p = \dfrac{1}{2} \\ H_1 : p > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- Région critique : $Z > b_{n,\,p=0{,}5\,;\,1-\alpha}$

  Fractile de la loi binomiale

- Remarque : en cas de valeurs égales, supprimer les couples correspondant à ces égalités

Test d'adéquation (non-paramétriques)

- Vérifier à partir d'un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ si une v.a. suit ou non une certaine loi de probabilité :

$$\left\{ \begin{array}{c} H_0 : X \sim Loi \\ H_1 : X \text{ ne suit pas } Loi \end{array} \right\}$$

  - Test du χ^2 : distance entre la fréquence théorique et la fréquence observée
  - Test de Kolmogorov-Smirnov : distance entre la fonction de répartition empirique et la fonction de répartition théorique
  - Test de normalité : droite de Henry

Tests à très faible puissance !!!

Test du χ^2

- Objectif : Vérifier à partir d'un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ si une v.a. suit ou non une certaine loi de probabilité

  - répartir les valeurs possibles de la v.a. X en K classes ; (classes de probabilité à priori p_k)

  - associer à un échantillon de taille n, un v.a. $(N_1, \ldots, N_K)$, où N_k est le nombre de fois où la valeur k a été observée

$$\begin{cases} H_0 : \text{les paramètres sont les } p_k \\ H_1 : \text{les paramètres ne sont pas les } p_k \end{cases}$$

Test du χ^2

- Variable de décision : distance entre l'effectif théorique $n*p_k$ et l'effectif observé N_k

$$D^2 = \sum_{k=1}^{K} \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k}$$

Si effectifs théoriques $n*p_k > 5$
sinon regrouper des classes !!!

- Fonction pivotale sous H_0 suit une loi de chi 2 : $D^2 \sim \chi^2_{K-1}$

Fractile de la loi de chi2

- Région critique : $D^2 > A$ => $D^2 > \chi^2_{K-1\,;\,1-\alpha}$

Test du χ^2

- Distance entre effectifs théorique n^*p_k et observé N_k

$$D^2 = \sum_{k=1}^{K} \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k} \sim \chi^2_{K-1}$$

- Région critique : $D^2 > A$ => $D^2 > \chi^2_{K-1\,;\,1-\alpha}$

- Remarques :
  - test applicable aux v.a. continues ou discrètes
  - si la loi de l'hypothèse H_0 présente r paramètres inconnus devant être estimés, alors :

$$D^2 = \sum_{k=1}^{K} \frac{(N_k - np_k)^2}{np_k} \sim \chi^2_{K-1-r}$$

Test de Kolmogorov-Smirnov

- Objectif : Vérifier à partir d'un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ si une v.a. suit ou non une certaine loi de probabilité $\begin{cases} H_0 : F = F_0 \\ H_1 : F \neq F_0 \end{cases}$
  - Var. décision : distance entre les fonctions de répartition empirique et théorique
    $$D_n = \max_x |F_n^*(x) - F_0(x)|$$
    où D_n suit une distribution tabulée qui, sous H_0, ne dépend plus de la loi de X
  - Région critique : $D_n > A$ => $D_n > d_{n;1-\alpha}$
  - Remarques :
    - plus précis que le test du χ^2,
    - applicable uniquement aux v. a. continues de loi de référence connue