UV Statistique pour l'Ingénieur

Cours n° 10

Tests statistiques paramétriques

HS-HS ; HS-HC ; HC-HC

A. ROGOZAN

Tests entre 2 hypothèses SIMPLES (Rappel)

- Exemple : Soit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ où μ inconnue et σ connue. Tester 2 hypothèses simples (ex 2 du TD1.6)

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 (HS) \\ H_1 : \mu = \mu_1 (\mu_1 < \mu_0)(HS) \end{cases}$$

- Région critique définie par $\overline{X} < \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} n_{1-\alpha_{fixé}}$ où α fixé et $\beta = f(n, \mu_0, \mu_1, \sigma)$ constant

- Remarque : autre test avec les mêmes hypothèses simples, mais avec $\mu_1 > \mu_0 \Rightarrow$ région critique définie par

$$\overline{X} > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} n_{1-\alpha_{fixé}}$$

Hypothèse SIMPLE contre hypothèse COMPOSITE

- Soit X une v.a. et θ l'unique paramètre inconnu de sa distribution de probabilité

- Se pose le problème de tester $\Rightarrow$ résoudre le test :

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 (HS) \\ H_1 : \theta \in E (\theta_0 \notin E)(HC) \end{cases} \qquad \begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 (HS) \\ H_1 : \theta = \theta_i (\theta_i \in E)(HS) \end{cases}$$

- la région critique W_i est indépendante de i
  - la région critique du test initial $W = W_i$
  - β dépend de la valeur du paramètre θ
  - $\theta \in E$ pour α fixée
    $\Rightarrow$ $1-\beta(\theta)$ est max / toute autre règle de décision

$\boxed{H_1 : \theta < \theta_0 \textbf{ ou } \theta > \theta_0}$

} Test UPP

Courbe de puissance d'un test (rappel)

- Courbe de puissance d'un test = fonction qui à chaque valeur du paramètre θ associe la probabilité de rejeter l'hypothèse de référence H_0 quand H_1 est vrai ($\theta \in E$)

$$\boxed{1-\beta(\theta)=P(rejeter\ H_0 | valeur\ du\ paramètre=\theta\in E)\in[0,1]}$$

- Définition d'un test UPP régi par la règle R_{UPP} :

$$\forall\, \theta\in E \text{ tel que } H_1 \text{ vrai}, \forall\, R,\ 1-\beta(R_{UPP})\geq 1-\beta(R)$$

Hypothèse SIMPLE contre hypothèse COMPOSITE

- Soit X une v.a. et θ l'unique paramètre inconnu de sa distribution de probabilité
- Se pose le problème de tester : $\left\{ \begin{array}{c} H_0 : \theta = \theta_0 \, (HS) \\ H_1 : \theta \in E \, (\theta_0 \notin E) \, (HC) \end{array} \right\}$

$H_1 : \theta \neq \theta_0$

- Si région critique W_i n'est pas constante

$\Rightarrow$ la stratégie de « Neyman-Pearson » n'est pas applicable

Fixer l'erreur grave maximum !

- Stratégie retenue :
  - conserver la contrainte $P[W|H_0] = \alpha_{fixée}$
  - chercher une région critique « raisonnable » en s'appuyant sur une « fonction pivotale »

  & en repartissant l'erreur grave de manière symetrique !

} Test non UPP

Hypothèse SIMPLE contre hypothèse COMPOSITE

- Soit X une v.a. et θ l'unique paramètre inconnu de sa distribution de probabilité
- Se pose le problème de tester : $\left\{\begin{array}{c} H_0 : \theta = \theta_0 (HS) \\ H_1 : \theta \in E(\theta_0 \notin E)(HC) \end{array}\right\}$ Test non UPP

- Si région critique W_i n'est pas constante $\boxed{H_1 : \theta \neq \theta_0}$

  ⇒ la stratégie de « Neyman-Pearson » n'est pas applicable

- Remarques :
  - α n'est pas constant mais $< \alpha_{fixée}$ (niveau de signification du test)
  - β n'est pas constant mais dépend de la valeur du paramètre $\theta \in H_1$

Hypothèse SIMPLE contre hypothèse COMPOSITE

- Ex de « Test UPP » : Soit $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ où μ inconnue, σ connue ;
  Tester 1 HS contre 1 HC
  Ex2.e/Chap1.6

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \,(HS) \\ H_1 : \mu < \mu_0 \,(HC) \end{cases}$$

Pour α fixé, déterminer la région critique,
puis l'expression du risque β de 2ème espèce

- Ex de « Test non-UPP » : Soit $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ où μ inconnu, σ connue ;
  Tester 1 HS contre 1 HC
  Ex1.b/Chap1.6

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \,(HS) \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \,(HC) \end{cases}$$

Pour α fixé, déterminer la région critique,
puis l'expression du risque β de 2ème espèce

Hypothèse COMPOSITE contre hypothèse COMPOSITE

- Soit X une v.a. et θ l'unique paramètre inconnu de sa distribution de probabilité
- Se pose le problème de tester : $\left\{\begin{array}{l} H_0 : \theta \leqslant \theta_0 \; (HC) \\ H_1 : \theta > \theta_0 \; (HC) \end{array}\right\}$

Th. de Lehman

- Si la famille des lois L_θ est à rapport de vraisemblance monotone*

  ⇒ Région critique de forme T>A où A défini par : $P(T > A \mid \theta = \theta_0) = \alpha_{fixée}$

  } Test UPP

* S'il ∃ 1 statistique T telle que, pour θ'>θ,

$\frac{L(x_1,,x_n,\theta')}{L(x_1,,x_n,\theta)}$ est une fonction croissante de t

Hypothèse COMPOSITE contre hypothèse COMPOSITE

- Soit X une v.a. et θ l'unique paramètre inconnu de sa distribution de probabilité
- Se pose le problème de tester : $\left\{\begin{matrix} H_0 : \theta \leqslant \theta_0 \,(HC) \\ H_1 : \underline{\theta > \theta_0} \,(HC) \end{matrix}\right\}$

- Si la famille des lois L_θ est à rapport de vraisemblance monotone*

  ⇒ Région critique de forme $\underline{T>A}$ où A défini par :

  $$P(\underline{T>A} \mid \theta = \theta_0) = \alpha_{fixée}$$

  } Test UPP

  - Remarques :
    - α n'est pas constant mais $<\alpha_{fixée}$ (niveau de signification du test)
    - β n'est pas constant mais dépend de la valeur de $\theta \in H_1$
    - Si hypothèses inverses, idem avec T<A

Hypothèse COMPOSITE contre hypothèse COMPOSITE

- Montrer que la famille des lois : N(μ, σ^2) avec σ connu, est à rapport de vraisemblance monotone

- Ex de « Test UPP » : Soit X~B(n, p) où n inconnu ;
Tester 1 HC contre 1 HC

Ex3/Chap1.6

$$\begin{cases} H_0 : p \leqslant p_0 \, (HC) \\ H_1 : p > p_0 \, (HC) \end{cases}$$

Pour α fixé déterminer la région critique,
puis l'expression du risque β de 2ème espèce

Hypothèse COMPOSITE contre hypothèse COMPOSITE

- X suit une loi dépendant de plusieurs paramètres inconnus, dont le paramètre θ sur lequel porte le test :

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0, \textit{autres paramètres inconnus} \, (HC) \\ H_1 : \theta >, <, \neq \theta_0, \textit{autres paramètres inconnus} \, (HC) \end{cases}$$

- Pas de test UPP ⇒ la stratégie de «Neyman-Pearson» non applicable

- Stratégie retenue :
  - trouver une fonction pivotale de θ
  - chercher une région critique « raisonnable »
  - déterminer le seuil avec la contrainte :

$$\alpha = P[W | H_0] \leqslant \alpha_{fixée}$$

} Test non UPP

Hypothèse COMPOSITE contre hypothèse COMPOSITE

- Ex «Test unilatéral non-UPP» : Soit X~N(μ, σ²) où μ et σ inconnus ; Tester 1 HC contre 1 HC

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 , \sigma\, inconnu\,(HC) \\ H_1 : \mu > \mu_0 , \sigma\, inconnu\,(HC) \end{cases}$$

Pour α fixé, déterminer la région critique,
puis l'expression du risque β de 2ème espèce

- Ex «Test bilatéral non-UPP» : Soit X~N(μ, σ²) où μ et σ inconnus ; Tester 1 HC contre 1 HC

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 , \sigma\, inconnu\,(HC) \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 , \sigma\, inconnu\,(HC) \end{cases}$$

Pour α fixé, déterminer la région critique,
puis l'expression du risque β de 2ème espèce

Hypothèse COMPOSITE contre hypothèse COMPOSITE

- Ex «Test unilatéral non-UPP» : Soit X~N(μ, σ^2) où μ et σ inconnus ; Tester 1 HC contre 1 HC

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, \mu\, inconnu\,(HC) \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2, \mu\, inconnu\,(HC) \end{cases}$$

Pour α fixé, déterminer la région critique, puis l'expression du risque β de 2ème espèce

- Ex «Test bilatéral non-UPP» : Soit X~N(μ, σ^2) où μ et σ inconnus ; Tester 1 HC contre 1 HC

Ex4/Chap1.6

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, \mu\, inconnu\,(HC) \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2, \mu\, inconnu\,(HC) \end{cases}$$

Pour α fixé, déterminer la région critique, puis l'expression du risque β de 2ème espèce

Classification des tests paramétriques

HS – HS

$=$

$=$

UPP

Neyman-Pearson

$$W = \left\{ \frac{L_n(\theta_1)}{L_n(\theta_0)} > k_\alpha \right\}$$

$$\boxed{W : \hat{\theta} < A \; (\hat{\theta} > A)}$$

$$\alpha = \alpha_{\textit{fixée}}$$
$$\beta = constant$$

HS – HC

$=$ $\quad$ $=$

$<$ $\quad$ $\neq$

UPP $\quad$ non-UPP

$W_i = W, \; \forall i$ $\quad$ $W_i = g(i)$

Découpe du test

Résolution fondée sur la « fonction pivotale »

$$\alpha = \alpha_{\textit{fixée}} \qquad \alpha \leqslant \alpha_{\textit{fixée}}$$
$$\beta = f(\theta) \qquad \beta = f(\theta)$$

HC – HC

$>$ $\quad$ $=, \ldots$

$<$ $\quad$ $<, \ldots$

UPP $\quad$ Non-UPP

Lehman

$$\frac{L_n(\theta_1)}{L_n(\theta_0)} \; monotone$$

$$\boxed{W : T < A}$$

$$\alpha \leqslant \alpha_{\textit{fixée}}$$
$$\beta = f(\theta)$$

Résolution fondée sur la « fonction pivotale »

P-value ou probabilité critique

- P-value ou probabilité critique
  - le plus petit α qui aurait fait changer la décision