

Les calculatrices sont autorisées. Aucun document n'est autorisé.

Merci d'éteindre et de ranger les téléphones portables ainsi que les montres connectées.

Les deux parties sont indépendantes.

On rappelle quelques opérateurs :

	En cartésien	En cylindrique	En sphérique
Gradient	$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$	$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$	$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$
Laplacien	$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

Partie 1 : Des résistances de conduction dans différents repères (10 points)

On souhaite établir les résistances de conduction d'un matériau conducteur de coefficient de transfert thermique k .

- Rappeler les conditions permettant de réduire l'équation de la chaleur à la simple expression $\Delta T = 0$. Vous rappellerez son lien avec les différents termes d'un bilan thermique.

$\Delta T = 0$ correspond à l'équation de la chaleur sans source de chaleur et à l'état stationnaire. Le Laplacien nul provient du bilan des échanges globalement nuls.

1 pt

- On se place en coordonnées cartésiennes.

- En déduire le profil de température dans un problème correspondant aux conditions données en question 1 et pouvant se réduire à une dimension (x). On déterminera les constantes d'intégration en sachant que les températures aux positions x_1 et x_2 séparées d'une distance $e = x_2 - x_1$ sont respectivement T_1 et T_2 .

1 pt

En 1D $\Delta T = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$, ce qui conduit à un comportement affine : $T(x) = ax + b$.
On détermine les constantes avec :

$$\begin{cases} T_1 = ax_1 + b \\ T_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

Et on en déduit que $T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{e}(x - x_1)$

- En déduire le flux thermique conductif traversant une section S orthogonale à la direction x en fonction des températures T_1 et T_2 et de e .

Ainsi, le flux est de la forme

1 pt

$$\Phi = \iint_S -k \vec{\nabla}(T) \cdot \vec{n} ds = -k \frac{dT}{dx} S = -k \frac{T_2 - T_1}{e} S$$

- En faisant appel à l'analogie électrique, déduire de la question précédente l'expression de la résistance thermique équivalente en fonction de e , k et S .

$$T_1 - T_2 = \Phi \times \frac{e}{kS} \text{ et donc } R_{cond} = \frac{e}{kS}$$

1 pt

3. Reprendre la question précédente en coordonnées cylindriques. On considérera les températures T_1 et T_2 correspondant respectivement aux positions radiales r_1 et r_2 . La surface considérée pour le calcul de flux sera celle d'un cylindre, c'est-à-dire une surface latérale de rayon r et de longueur L . On exprimera la résistance à l'aide des variables r_1 , r_2 , k et L .

3 pts

a) En 1D $\Delta T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$, ce qui conduit à $\frac{dT}{dr} = \frac{A}{r}$ et donc à $T = A \ln(r) + B$

On détermine les constantes avec :

$$\begin{cases} T_1 = A \ln(r_1) + B \\ T_2 = A \ln(r_2) + B \end{cases}$$

Et on en déduit que $A = \frac{T_1 - T_2}{\ln(\frac{r_1}{r_2})}$ et $B = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln(\frac{r_1}{r_2})} \ln(r_1)$ conduisant au profil :

$$T = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln(\frac{r_1}{r_2})} \ln(r/r_1) \text{ (ou, alternativement) } T = T_2 + \frac{T_1 - T_2}{\ln(\frac{r_1}{r_2})} \ln(r/r_2)$$

b) le flux devient

$$\Phi(\mathbf{r}) = \iint_S -k \frac{dT}{dr} \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r ds = -k \frac{dT}{dr} S = -k \frac{A}{r} S = -\frac{kS}{r} \frac{T_1 - T_2}{\ln(\frac{r_1}{r_2})}$$

Avec $S = 2\pi rL$

c) $T_1 - T_2 = \Phi \times \frac{\ln(\frac{r_2}{r_1})}{2\pi kL}$ et donc $R_{cond} = \frac{\ln(\frac{r_2}{r_1})}{2\pi kL}$

4. Reprendre encore la même question en coordonnées sphériques. Comme pour la question précédente, on considérera les températures T_1 et T_2 correspondant respectivement aux positions radiales r_1 et r_2 séparées d'une distance $\Delta R = r_2 - r_1$. La surface considérée pour le calcul de flux sera celle d'une sphère de rayon r . On exprimera la résistance à l'aide des variables r_1 , r_2 et k .

3 pts

a) En 1D $\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = 0$, ce qui conduit à $\frac{dT}{dr} = \frac{A}{r^2}$ et donc à $T = -\frac{A}{r} + B$

On détermine les constantes avec :

$$\begin{cases} T_1 = -\frac{A}{r_1} + B \\ T_2 = -\frac{A}{r_2} + B \end{cases}$$

Et on en déduit que $A = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}$ et $B = T_1 - \frac{A}{r_1}$ conduisant au profil :

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right)$$

b) le flux devient

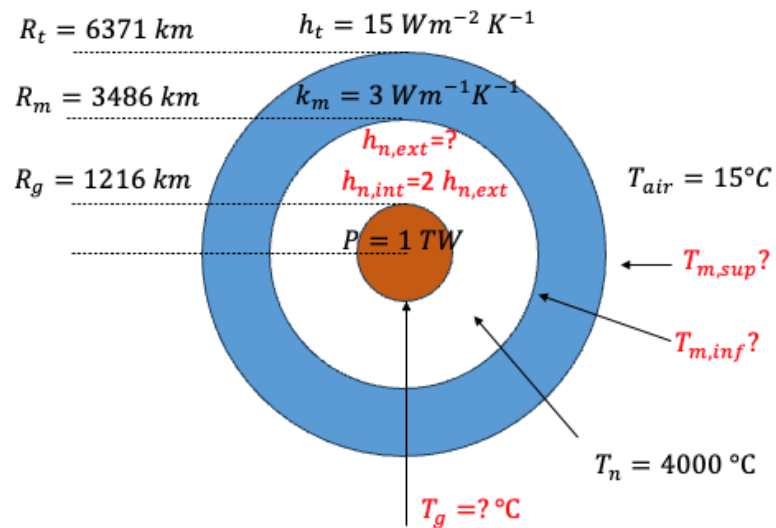
$$\Phi(\mathbf{r}) = \iint_S -k \frac{dT}{dr} \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r ds = -k \frac{dT}{dr} S = -k \frac{A}{r^2} S = -k \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}} \frac{S}{r^2}$$

Avec $S = 4\pi r^2$, il vient $\Phi = 4\pi k \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$

c) $T_1 - T_2 = \Phi \times \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{4\pi k}$ et donc $R_{cond} = \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}{4\pi k}$

Partie 2 : Conduction thermique au sein de la planète Terre (10 points)

La Terre est constituée d'un noyau (graine) composé de fer et de nickel de rayon $R_g = 1216$ km. Il est maintenu solide du fait de la très grande pression qui s'y exerce. Il s'y produit une cristallisation très lente responsable d'un dégagement thermique estimé à $P = 1$ TW (10^{12} W).



Ce noyau (ou graine) est entouré d'un noyau externe composée de fer et d'éléments légers à l'état liquide, en mouvement de convection permanent. C'est ce mouvement qui induit le champ magnétique terrestre ! Cette phase « liquide » occupe le domaine sphérique compris entre R_g et $R_m = 3486$ km. On estime sa température à $T_n = 4000$ °C. On ne connaît pas précisément les coefficients de convection au sein du noyau externe. Mais on peut, du fait des vitesses, températures et surfaces mises en jeu, estimer que le coefficient de convection à l'interface avec la graine est 2 fois supérieur à celui régnant au niveau de l'interface avec la croûte terrestre (rayon R_m).

La croûte terrestre, comprise entre R_m et $R_t = 6371$ km, est de composition solide et de conductivité thermique évaluée à $k_m = 3$ W/m/K.

Le flux thermique finalement dégagé à la surface de la Terre avec l'atmosphère est de nature convective (on prendra $h_t = 15$ W/m²/K et une température de l'air moyenne au niveau du sol $T_{air} = 15$ °C).

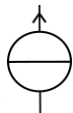
L'objectif de ce problème est d'évaluer les températures rencontrées aux différentes interfaces précédemment décrites et de proposer une évaluation de la température qui règne au sein de la graine, au cœur de notre planète.

On donne l'expression des résistances en coordonnées sphériques :

- De conduction, se produisant entre deux rayons d'une sphère : $R_{cond} = \frac{1}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$
- Et de convection au rayon r : $R_{conv} = \frac{1}{h 4\pi r^2}$

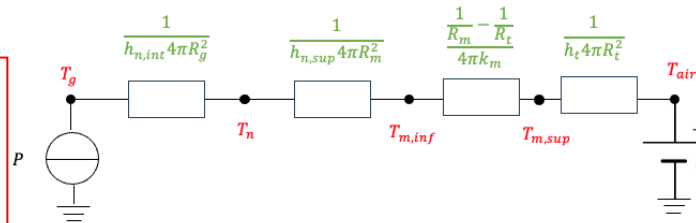
On négligera tout effet de rayonnement à la surface terrestre et on considérera le problème stationnaire.

1. Proposer un schéma électrique équivalent en faisant apparaître, les résistances et températures avec les notations du problème. Pour rappel, en électricité, une source de

potentiel est un générateur de tension, représenté par $\frac{1}{T}$ alors qu'un générateur de courant est représenté par  (source de flux de charges électriques).

Solution :

3 pts 1 pour les alimentations et positionnements des résistances, 1 pour les expressions des résistances et 1 pour le positionnement des températures



Les questions suivantes peuvent être résolues sans le schéma précédent.

2. Sachant que les échanges sont stationnaires et que la totalité du flux généré par la graine est dissipé au travers des couches successives et finalement à la surface terrestre, calculer la température au sol $T_{m,sup}$. Commenter votre résultat.

1 pt

$$P = h_t(T_{m,sup} - T_{air})4\pi R_t^2 \rightarrow T_{m,sup} = T_{air} + \frac{P}{h_t 4\pi R_t^2} = 15^\circ C$$

Malgré la puissance dissipée colossale, la différence de température est minime du fait de l'énorme surface d'échange.

3. En déduire la température $T_{m,inf}$ à l'intérieur du manteau.

1 pt

$$T_{m,inf} - T_{m,sup} = P \times \frac{\frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_t}}{4\pi k_m} \quad \text{et} \quad \text{donc} \quad T_{m,inf} = T_{m,sup} + P \times \frac{\frac{1}{R_m} - \frac{1}{R_t}}{4\pi k_m} = 15 + 10^{12} \times \frac{\frac{1}{3.486 \times 10^6} - \frac{1}{6.371 \times 10^6}}{4\pi \times 3} = 3461^\circ C$$

4. En déduire une évaluation du coefficient de convection h_n se produisant à l'interface entre le manteau et le noyau liquide. Discuter de la valeur numérique ainsi obtenue.

$$P = h_{n,ext}(T_n - T_{m,inf})4\pi R_m^2 \quad \text{ainsi} \quad h_{n,ext} = \frac{P}{(T_n - T_{m,inf})4\pi R_m^2} =$$

1 pt

$\frac{10^{12}}{(4000 - 3460)4\pi \times (3.486 \times 10^6)^2} = 1.21 \times 10^{-5} Wm^{-2}K^{-1}$. C'est très faible comparé aux échanges standards se produisant dans l'air (de l'ordre de 10). Le métal liquide ne transmet pas bien la chaleur, certainement du fait des très faibles vitesses et de la dimension du système.

5. En déduire enfin la température de surface de la graine. Commenter ce résultat.

$$P = h_{n,int}(T_g - T_n)4\pi R_g^2 \quad \text{ainsi} \quad T_g = T_n + \frac{P}{2h_{n,ext}4\pi R_g^2} = 4000 +$$

1 pt

$$\frac{10^{12}}{2.43 \times 10^{-5} 4\pi \times (1.216 \times 10^6)^2} = 6216^\circ C.$$

Exploitation rapide du modèle

6. Le forage le plus profond sur Terre a été réalisé en Russie et a permis d'atteindre la profondeur de $e = 12\,262$ m. Selon notre modèle, quelle température peut-on atteindre à cette profondeur ?

1 pt

$$T_m(e) = T_{m,sup} + P \times \frac{\frac{1}{R_t - e} - \frac{1}{R_t}}{4\pi k_m} = 23,03^\circ C \text{ soit } 8^\circ C \text{ de plus qu'à la surface.}$$

7. Quel est la densité de flux libérée à la surface de la Terre ? Comparer au flux solaire parvenant à la surface de la Terre.

1 pt

$$\varphi = \frac{P}{4\pi R_t^2} = 2.0 \text{ mW/m}^2$$

Ce flux est totalement négligeable en comparaison de l'éclairement solaire qui est de l'ordre de 100 W/m^2 .

8. Dans ce modèle, la température de l'atmosphère a été fixée. Expliquer la modélisation à effectuer qui donnerait la température de l'air atmosphérique.

1 pt

Pour que la température de l'air découle du modèle, il faudrait ajouter un bilan sur l'air atmosphérique en incluant les échanges radiatifs en provenance du soleil et issus de la surface terrestre (effet de Serre).