UV Statistique pour l'Ingénieur

Cours n° 9

Tests statistiques

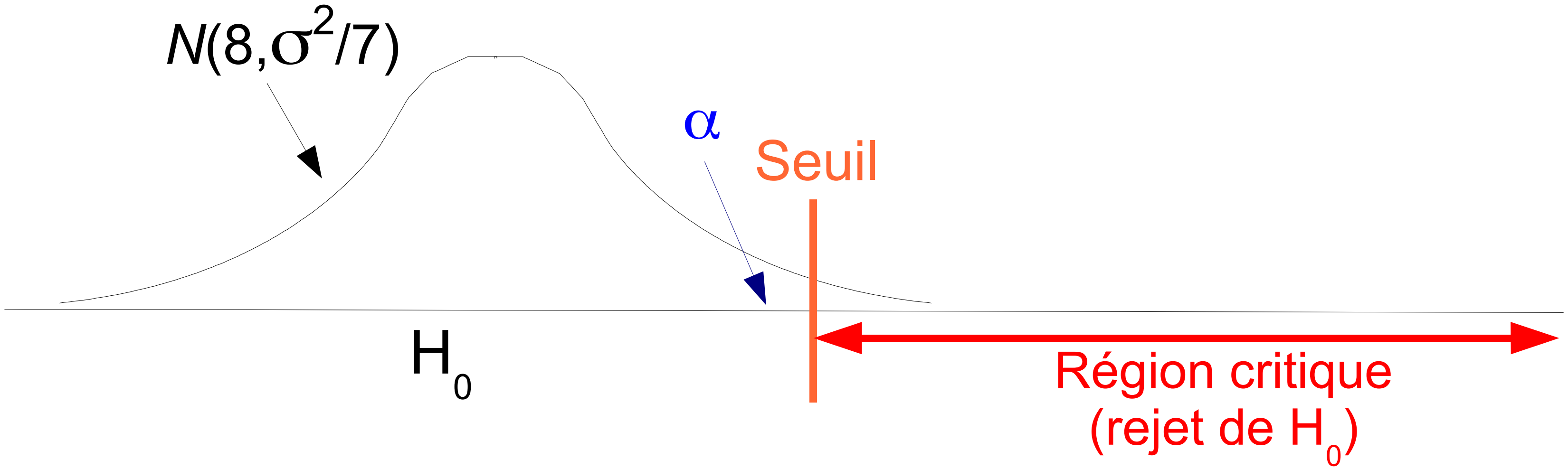
. ROGOZAN

Exemple

- Réviser les statistiques => réussir l'examen ???
  - on aimerait bien croire en cette affirmation de PhL ...
    mais ce n'est pas l'hypothèse privilégiée des étudiants
    - H_0 : ce n'est pas vrai   note =8   *(hypothèse nulle)*
    - H_1 : c'est vrai   note = 11   *(hypothèse alternative)*
  - réviser coûte du temps et de l'énergie ... il faut donc arriver à prouver H_1 pour que les étudiants soient convaincus
  - on observe la note moyenne des examens depuis 1999 :
    9 11 10 12 8 11 12

Exemple

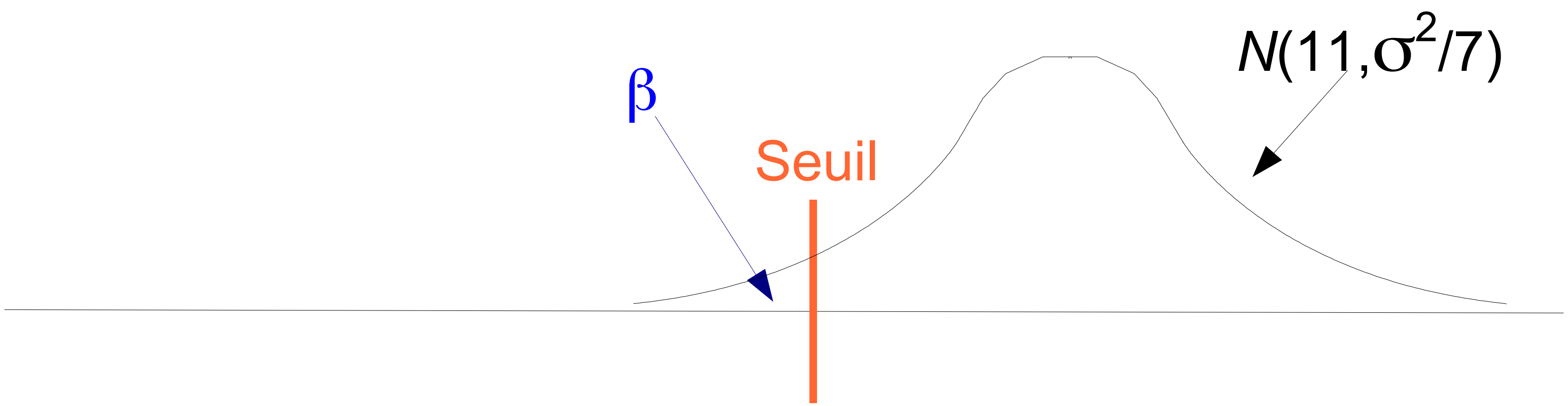
- Réviser les statistiques => réussir l'examen ???
  - on modélise la situation H_0 : note moyenne ~ $N(8,\sigma^2/7)$
  - à partir de quelle note moyenne est-on sur de pouvoir accepter H_1 à la place de H_0 en se trompant uniquement de α=5%



  - si note moyenne < Seuil, on décide H_0 sinon H_1

Exemple

- Réviser les statistiques => réussir l'examen ???
  - mais quelle est l'erreur commise en choisissant H_0 alors que H_1 est vrai ? ==> calcul de β



  - les pourcentages d'erreur α et β n'ont pas le même rôle

Principe des tests statistiques

- But :
  - Décider, à la vue de l'échantillon $X_1,\ldots,X_n$ tiré, entre deux hypothèses complémentaires :
    - H_0 (hypothèse nulle)
    - H_1 (hypothèse alternative)
  - Ces hypothèses peuvent porter sur :
    - le(s) paramètre(s) inconnu(s) d'une loi connue (test paramétrique)
    - la distribution inconnue d'une v.a. X (test non-paramétrique).

Principes des tests statistiques

- Méthode générale

  - Poser le test
    = définir les hypothèses ;

  - Résoudre le test :
    = construire une règle de décision associant à toute réalisation de l'échantillon soit H_0, soit H_1

  - Décider
    à partir d'une réalisation de l'échantillon

Poser le test - définir les hypothèses H_0 et H_1

- Les deux hypothèses ne jouent pas un rôle symétrique (lors de la détermination de la règle de décision)

1. L'hypothèse nulle H_0 est privilégiée par rapport à l'hypothèse alternative (ou de référence) H_1, car supposée plus vraisemblable

   - Le seuil de la règle de décision dépend de H_0, mais pas de H_1
   - La puissance du test (capacité d'écarter H_0 en ayant raison) dépend de H_0 et de H_1

Poser le test - définir les hypothèses H_0 et H_1

- Les deux hypothèses ne jouent pas un rôle symétrique (lors de la détermination de la règle de décision)

2. Le choix de l'hypothèse nulle H_0 est primordial :

   - hypothèse la plus plausible (ou raisonnable) car non contredite par les résultats des expériences
   - hypothèse habituelle
   - hypothèse de prudence
   - hypothèse plus facile à formuler

H_0 : «fumer provoque le cancer»

H_0 : X suit une Loi Normale

H_0 : «le médicament est inefficace»

H_0 : $\theta=\theta_0$; H1 : $\theta<\theta_0$

Poser le test (paramétrique) choix d'hypothèses et décisions

- Le procédé augmente de 50 mm le niveau moyen des pluies?

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 = 600\,mm \\ H_1 : \mu = \mu_1 = 650\,mm \end{cases}$$

D = { *j'achète le procédé / je n'achète pas* }

$\theta = \mu$; Loi = Normale ; Hypothèse de prudence

- Le médicament est efficace ou inefficace (pour réduire le niveau de cholestérol) ?

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

D = { *j'achète le produit / je n'achète pas* }

$\theta = ?$; Loi = ? ; Hypothèse de ...

- Le patient est malade (niveau de cholestérol trop élevé) ?

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 (\mu_1 < \mu_0) \end{cases}$$

D = { *on soigne / on ne soigne pas* }

$\theta = ?$; Loi = ? ; Hypothèse de ...

Poser le test (paramétrique) choix d'hypothèses et décisions

- Le diamètre des pièces est supérieur à la norme ?

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

D = { *c'est vrai / c'est faux* }

θ=? ; Loi = ? ; Hypothèse de ...

- La qualité d'un lot est satisfaisante (pour le producteur) ?

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$$

p = *P(trouver 1 pièce défectueuse)*

D = { *j'accepte / je refuse le lot* }

θ=? ; Loi = ? ; Hypothèse de ...

- La qualité d'un lot est satisfaisante (pour le client) ?

Erreurs de décision

Vérité / Décision	H_0	H_1
On *accepte* H_0	$1-\alpha$	β
On *rejette* H_0	α	$1-\beta$

erreur moins grave

erreur très grave

- Probabilités d'erreur
  - de 1ère espèce : α = P(choisir H_1 alors que H_0 est vrai)
  - de 2ème espèce : β = P(garder H_0 alors que H_1 est vrai)
  - ➔ Risques différents en pratique !

- Puissance du test : $1-\beta$ = P(choisir H_1 alors que H_1 est vrai)

Résoudre le test - choix d'une règle de décision

- Soit X une v.a. dont la loi de probabilité, supposée connue, dépend d'un seul paramètre inconnu θ sur lequel porte le test

$$\begin{cases} H_0, \theta \in A_0 \\ H_1, \theta \in A_1 \end{cases}$$

  - Optique décisionnelle : préférer la règle de décision R_1 à R_2 si

$$\begin{cases} \forall \theta \in A_0, \alpha(R_1) \leqslant \alpha(R_2) \\ \forall \theta \in A_1, \beta(R_1) \leqslant \beta(R_2) \end{cases}$$

  ➔ problème car impossible de minimiser simultanément les risques de 1ère et de 2ème espèces.

Résoudre le test : Choix d'une règle de décision

- Optique « Neyman-Pearson » : dissymétriser !

  - fixer α (niveau de signification) = contrôler l'erreur GRAVE

  - minimiser le risque de 2ème espèce β (ou maximiser 1-β) pour une valeur fixée du risque α de 1ère espèce

- Règle de décision R_1 d'un test UPP (Uniformément Plus Puissant)

$$\forall \theta \in A_1, \forall R, 1-\beta(R_1) \geq 1-\beta(R), \beta(R_1) \leqslant \beta(R)$$

Résoudre le test - construire la règle de décision

- Choisir comme variable de décision la statistique *T* qui

  - apporte le maximum d'information sur le problème posé
    (estimateur exhaustif)

  - avec un risque d'erreur minimum
    (estimateur efficace)

  - *T* doit avoir une loi différente selon que H u H_1 est vraie
    (condition nécessaire)

  - *T* doit avoir une loi connue au moins si H_0 est vraie
    (condition suffisante)

Résoudre le test - construire la règle de décision

- Déterminer la *région critique W*
  = ensemble des valeurs de *T* qui conduisent à écarter H_0 au profit de H_1

  - $\boxed{P(W|H_0)=\alpha \qquad P(W|H_1)=1-\beta}$

    α fixé
    β à minimiser

  - forme de la région critique: *T<seuil, T>seuil ou T≠ seuil*

- *Région d'acceptation* $\bar{W}$

  - $\boxed{P(\bar{W}|H_0)=1-\alpha}$

Résoudre le test - autres règles de décision

- Règle « pure » (page précédente)
  - si T>seuil on garde H_0 sinon on rejette H_0
- Règle « mixte »
  - on tire au sort la décision
- Règle « générale » (avec rejet)
  - hypothèse H_2 : « je ne sais pas »
    par exemple, s'il n'y a pas assez d'information pour décider raisonnablement => on augmente la taille de l'échantillon
- Théorie de la décision bayésienne (coûts)
  - UV Data Mining ; UV RNA

Fiche « recette » pour la construction d'un test

- Fixer les hypothèses :
  - définir la nature de H_0 et H_1
  - choisir l'hypothèse H_0 de référence
- Construire la règle de décision :
  - choisir la variable de décision (statistique *T* adaptée)
  - forme de la région critique (*T<seuil, T>seuil* ou *T≠ seuil*)
  - déterminer l'expression du seuil (pour α fixé, minimiser β)
- Rejet ou acceptation de H_0 au vu de l'échantillon tiré :
  - à partir de la valeur empirique de la variable de décision *T* sur l'échantillon tiré

Taxinomie des tests statistiques

- Tests paramétriques :
  - tester des hypothèses relatives à un ou plusieurs paramètres d'une v.a. de loi spécifiée
    exemple: on suppose que $X \sim N(\mu,\sigma^2)$
  - hypothèse simple $\{H : \theta = \theta_0\}$
    - uniquement si les autres paramètres sont connus sinon elle devient une hypothèse composite
  - hypothèse composite $\{H : \theta \in A\}$
    $\{H : \theta < \theta_0\}$ $\{H : \theta > \theta_0\}$ $\{H : \theta \neq \theta_0\}$

Taxinomie des tests statistiques

- Robustesse d'un test :
  - qualité de rester relativement insensible à certaines modifications du modèle
  - i.e. tests de moyenne, tests de non-corrélation

- Tests libres :
  - tests robustes par rapport à la loi de probabilité (tests souvent non-paramétriques)
  - i.e. tests d'ajustement du « chi2 »

Tests entre 2 hypothèses SIMPLES

X v.a. dont la distribution dépend du seul paramètre inconnu θ

- se pose le problème de tester : $\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 (HS) \\ H_1 : \theta = \theta_1 (HS) \end{cases}$

- pour α fixé : $\int_W L(x_1,,x_n;\theta_0)\,dx_1\,dx_n = \alpha_{fixé} = P(W|H_0)$

  on veut maximiser : $1-\beta = \int_W L(x_1,,x_n;\theta_1)\,dx_1\,dx_n = P(W|H_1)$

- Région critique optimale
  = ensemble des points W de R^n tels que :

Th. de Neyman Pearson

$$W = \left\{ \frac{L(x_1,,x_n;\theta_1)}{L(x_1,,x_n;\theta_0)} > k_{\alpha_{fixé}} \right\}$$

➔ *T* < *seuil* ou *T* > *seuil*

Tests entre 2 hypothèses SIMPLES

- Exemple 1 :
  - soit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ où μ inconnue et σ connue
  - se pose le problème de tester 2 hypothèses simples :

Paramètre θ inconnu

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \, (HS) \\ H_1 : \mu = \mu_1 \, (\mu_1 < \mu_0) \, (HS) \end{cases}$$

Variable T de décision

- La région critique est définie par
  - α fixé
  - $\beta = f(n, \mu_0, \mu_1, \sigma)$ constant

$$\boxed{\bar{X} < \underbrace{\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} n_{1-\alpha_{fixé}}}}$$

Seuil fonction de H_0 mais pas de H_1

Tests entre 2 hypothèses SIMPLES

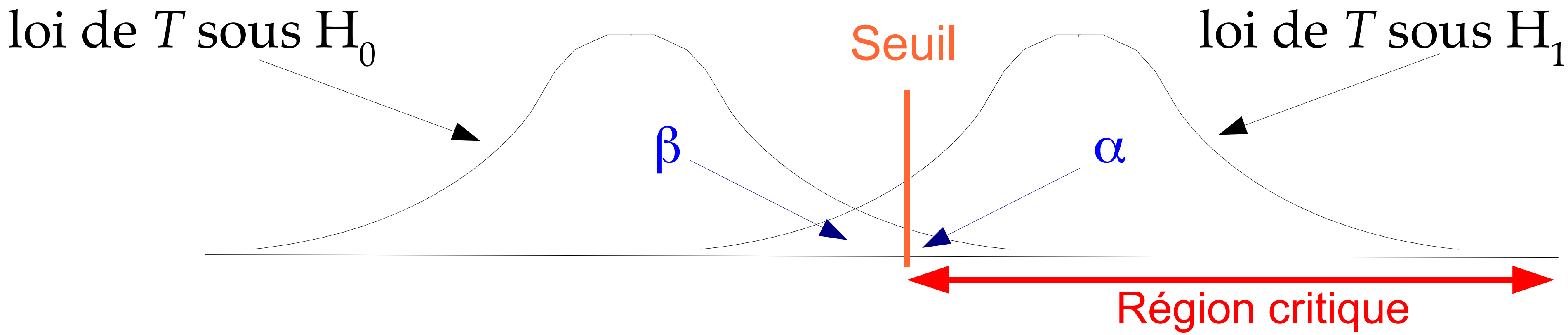
- Exemple 1 :
  - soit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ où μ inconnue et σ connue
  - se pose le problème de tester 2 hypothèses simples :

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \, (HS) \\ H_1 : \mu = \mu_1 \, (\mu_1 > \mu_0) \, (HS) \end{cases}$$

- La région critique est définie par $\boxed{\bar{X} > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} n_{1-\alpha_{fixé}}}$

Tests entre 2 hypothèses SIMPLES

- Interprétation graphique des erreurs α et β :



- Remarques :
  - le seuil est calculé en contrôlant le risque de 1ère espèce α
    - si α diminue, le seuil et β augmentent
  - $\beta>\alpha$ (généralement)
  - quand $n\to\infty$, pour α fixé, $\beta\to 0$ alors le test est *convergent*