

UV Statistique pour l'Ingénieur

Cours n° 7

Statistique inférentielle : estimation
méthodes d'estimation ponctuelle

Estimation ponctuelle d'un paramètre méthode du maximum de vraisemblance

- Objectif : Construire un estimateur d'un paramètre Θ
- Avantage : Fournir des estimateurs dont on connaît la distribution asymptotique (c.a.d. leur loi quand $n \rightarrow \infty$)
 - Pratique pour l'estimation par intervalle de confiance et pour les tests d'hypothèses (à suivre)

« Fiche recette »

$$\hat{\Theta}_{MV} = \max_{\Theta} L(x_1, \dots, x_n, \Theta)$$

- $L(x_1, \dots, x_n, \Theta) = \prod_{i=1}^N f(x_i, \Theta)$
 $\ln L(x_1, \dots, x_n, \Theta) = \sum_{i=1}^N \ln f(x_i, \Theta) \Rightarrow$ Calculs + simples!
- Équation de vraisemblance : $\frac{\partial \ln L}{\partial \Theta}(x_1, \dots, x_n, \Theta) = 0$
- Prendre la valeur max : $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \Theta^2}(x_1, \dots, x_n, \Theta) < 0$

- Si $\frac{\partial \ln L}{\partial \Theta}(X_1, \dots, X_n, \Theta) = A(n, \Theta)(\hat{u} - u(\Theta))$

- + Conditions de Cramer Rao vérifiées
- + estimateur (asymptotiquement) sans biais

alors $Var(\hat{u}) = \frac{u'(\Theta)}{A(n, \Theta)}$

Estimation ponctuelle d'un paramètre méthode du maximum de vraisemblance

- Remarques :
 - L'éq° de vraisemblance ne conduit pas forcément à un estimateur $\hat{\Theta}_{MV}$ unique
 - Il peut exister un $\hat{\Theta}_{MV}$ même quand L n'est pas 2 fois dérivable (i.e. loi uniforme)
 - L'éq° de vraisemblance n'est pas forcément « résolvable » de manière formelle (et peut nécessiter l'utilisation de méthodes itératives)

Estimation ponctuelle d'un paramètre méthode du maximum de vraisemblance

- Exemples :
 - Soit une v.a. $X \sim P(\lambda)$ de paramètre inconnu λ
construire un estimateur $\hat{\lambda}_{MV}$
 - Soit une v.a. qui suit une loi de Weibull $f(x; \Theta) = \Theta x^{\Theta-1} e^{-x^\Theta}$
 - ...

Estimation ponctuelle d'un paramètre méthode du maximum de vraisemblance

- Propriétés :
 - Si $\hat{\Theta}_{MV}$ estimateur du max. de vraisemblance de Θ
alors $u(\hat{\Theta}_{MV})$ est l'estimateur du max. de vrais. de $u(\Theta)$
 - S'il existe un estimateur T efficace de Θ ou de $u(\Theta)$ et si $\hat{\Theta}_{MV}$ est une solution de l'éq° de vraisemblance
alors $T = f(\hat{\Theta}_{MV})$
et la solution de l'éq° de vraisemblance est unique
(la réciproque est fausse ; ex : loi exp)

Estimation ponctuelle d'un paramètre méthode du maximum de vraisemblance

- Propriétés de la distribution asymptotique :
 - Si $\hat{\Theta}_{MV}$ estimateur du max. de vraisemblance de Θ
 $\hat{\Theta}_{MV}$ n'est pas nécessairement sans biais,
mais il est asymptotiquement sans biais.
 - Si les conditions de Cramer-Rao sont vérifiées,
 $\hat{\Theta}_{MV}$ est asymptotiquement efficace
 - Sous certaines conditions (conditions de Cramer-Rao et n grand), $\hat{\Theta}_{MV}$ est asymptotiquement gaussien

($\mu \rightarrow \Theta$ et $\sigma^2 \rightarrow$ Borne de Cramer – Rao)

Estimation ponctuelle d'un vecteur de paramètres méthode du maximum de vraisemblance

- Objectif : Construire un estimateur d'un vecteur de paramètres $\theta_1, \dots, \theta_p$
- « Fiche recette » : annuler les dérivées partielles de $\ln L$ par rapport à chacun des paramètres θ_i

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \Theta_i}(x_1, \dots, x_n, \Theta_i) = 0 \text{ pour } i \in \{1, \dots, p\}$$

- Exemple : Soit une v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ayant 2 paramètres inconnus μ et σ^2

Construire 2 estimateurs $\hat{\mu}_{MV}$ et $\hat{\sigma}_{MV}^2$

Estimation ponctuelle d'un vecteur de p paramètres méthode des moments

- « Fiche recette » : à l'aide de p équations :
{moment théorique de la v.a. = moment empirique de l'échantillon}
- pb. du choix des moments : *centrés* ou *non-centrés*

Moment Empirique	$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P}$	Moment Théorique	Équation(s)
$\hat{m}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$		$m_k = E(X^k)$	$m_k = \hat{m}_k$
$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$		$\mu_k = E(X - E(X))^k$	$\mu_k = \hat{\mu}_k$

Estimation ponctuelle d'un vecteur de p paramètres méthode des moments

- « Fiche recette » : à l'aide de p équations :
{moment théorique de la v.a. = moment empirique de l'échantillon}
- pb. du choix des moments : *centrés* ou *non-centrés*
- Exemple :
 - Soit une v.a. $X \sim U_{[\theta_1, \theta_2]}$ de paramètres inconnus θ_1 et θ_2
Construire les 2 estimateurs $\hat{\theta}_{1m}$ et $\hat{\theta}_{2m}$

Estimation ponctuelle d'un vecteur de p paramètres méthode des moments

- Propriété : les estimateurs $\hat{\Theta}_m$ obtenus par la méthode des moments sont :

- convergents $\hat{\Theta}_m \xrightarrow{P} \Theta$

- asymptotiquement gaussiens $\sqrt{n}(\hat{\Theta}_m - \Theta) \xrightarrow{L} N(0, \sigma_m^2)$

où la variance σ_m^2 dépend des moments utilisés