

Statistiques pour l'Ingénieur

Cours n°5/6

Statistique inférentielle : Estimation

- définitions
- qualités d'un estimateur
- théorème de Cramer-Rao

Estimation : formalisation et notations

- Soit une v.a. X , dont la loi - supposée connue - dépend d'un paramètre Θ qui est inconnu
 - NB: Θ peut être vectoriel
- Supposons que l'on dispose d'une réalisation x_1, \dots, x_n d'un échantillon i.i.d. X_1, \dots, X_n de loi parente X

- Objectif : Estimer Θ à partir de la réalisation x_1, \dots, x_n

- L'estimation peut être :
 - ponctuelle : $\Theta = \text{valeur}$
 - par intervalles : $\Theta \in [a, b]$

Estimation : formalisation et notations

- Objectif : Estimer Θ à partir de la réalisation x_1, \dots, x_n

Théorique

- Estimateur du paramètre Θ :
 - $T = f(X_1, \dots, X_n)$ que l'on note aussi $\hat{\Theta}$
 - $T =$ statistique de l'échantillon
= v.a. ayant sa propre loi de probabilité

Empirique

- Estimation :
 - réalisation $t = f(x_1, \dots, x_n)$ de l'estimateur $T = f(X_1, \dots, X_n)$

- Questions :
 - Comment construire la statistique T ?
 - Quelle est la précision de l'estimation t ?
 - Comment choisir la taille de l'échantillon n ?

Qualités d'un estimateur

- Problème : un même paramètre Θ peut être estimé à l'aide d'estimateurs différents
 - ex : pour une distribution symétrique, la médiane et la moyenne empirique sont des estimations de l'espérance
- Il faut définir les qualités exigées d'un estimateur afin de choisir entre plusieurs estimateurs possibles

▪ estimateur **convergent** : quand $T \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \Theta$ c.a.d. si

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P(|T - \Theta| > \epsilon) = 0$$

- ex : la loi de grands nombres permet de montrer que \bar{X} est un estimateur convergent de μ

Qualités d'un estimateur

- Problème : deux estimateurs convergents ne convergent pas à la même vitesse vers le paramètre Θ
 - la vitesse de convergence dépend de n
 - à n fixé, elle dépend de la précision de l'estimateur

- La précision (ou risque) de l'estimateur dépend de l'erreur d'estimation :

- Erreur = $T - \Theta$ (v.a.)

- = Erreur quadratique moyenne (EQM) :

$$R(T, \Theta) = E[(T - \Theta)^2] = \text{Var}(T) + (E(T) - \Theta)^2$$

$$= \text{var. de l'estimateur} + \text{biais}^2$$

Qualités d'un estimateur

- Estimateur **préférable** :

$$T_1 \text{ préférable à } T_2 \text{ si } \forall \theta \in \mathcal{R}, \quad R(T_1, \theta) \leq R(T_2, \theta)$$

- Estimateur **admissible** :

T admissible s'il n'existe pas d'autre estimateur qui lui soit préférable

Biais d'un estimateur : $E(T) - \Theta$

- Stratégie MIN-MAX : $\min_T \{ \max_{\Theta} \{ R(T, \Theta) \} \}$
 - Minimiser l'EQM = minimiser $E[(T - \Theta)^2]$, souvent difficile
- Approche : chercher parmi les estimateurs **sans biais**
 - Trouver l'estimateur sans biais **de variance minimale**

- Paramètre : $\mu = E(X)$
- Estimateur : $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$



SANS BIAIS car
 $E(\bar{X}) = E(X) = \mu$

- Paramètre : $\sigma^2 = Var(X)$
- Estimateur : $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$



AVEC BIAIS car

$$E(S^2) = \frac{(n-1)}{n} Var(X) \neq \sigma^2$$

- Estimateur sans biais : $S^{*2} = \frac{n}{n-1} S^2$

Exemple d'estimateur biaisé S^2

- Paramètre : $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ estimateur : $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

- Montrez le th. de Huygens

$$\forall a \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n (X_i - a)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - a)^2$$

- Utilisez-le avec $a = \mu$ et montrez que $E(S^2) = \frac{(n-1)}{n} \text{Var}(X) \neq \sigma^2$
- Montrez que $S^{*2} = \frac{n}{n-1} S^2$ n'est pas biaisé

Qualités d'un estimateur

- Propriété :

Si T est un estimateur (asymptotiquement) sans biais

($\lim_{n \rightarrow \infty} E(T) = \Theta$) et $\lim_{n \rightarrow \infty} Var(T) = 0$ alors T est convergent.

- Remarque : la convergence et l'absence de biais ne garantissent pas l'unicité d'un estimateur

- Problème : soit une v.a. X

- définie par une famille paramétrée de lois $f(x; \Theta)$ [f connue]
- observée sur x_1, \dots, x_n
- comment trouver l'estimateur T sans biais de Θ de variance minimum ?

Statistique exhaustive

- Soient
 - X_1, \dots, X_n un n-échantillon d'une v.a.
 - $L(x_1, \dots, x_n, \Theta)$ la vraisemblance de l'échantillon
 - T une statistique
- Statistique exhaustive : T est dite exhaustive
 - si elle contient toute « l'information » apportée par l'échantillon relativement à la connaissance de Θ
 - i.e. par le principe de factorisation, si $\exists g$ et h /
$$L(x_1, \dots, x_n, \Theta) = g(t, \Theta) h(x_1, \dots, x_n)$$
 - remarque : la factorisation permet de reconnaître que T (connue) est exhaustive, mais permet difficilement de la construire ou même de savoir s'il en existe une

Exemples de statistiques exhaustives

- Loi de Bernoulli de paramètre inconnu p

- $T = \sum_{i=1}^n X_i$ est exhaustive pour p

$$L(x_1, \dots, x_n, p) = p^t (1-p)^{n-t} \quad [h(\dots)=1]$$

- Loi exponentielle $\frac{1}{\Theta} \exp\left(\frac{-x}{\Theta}\right)$ de paramètre inconnu Θ

- $T = \sum_{i=1}^n X_i$ est exhaustive pour Θ

$$L(x_1, \dots, x_n, \Theta) = \dots \quad [h(\dots)=1]$$

Exemples de statistiques exhaustives

- Loi normale de paramètres μ et σ^2 :

- Si σ^2 est connu,

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ est exhaustive pour le paramètre inconnu μ

$$L(x_1, \dots, x_n, \mu) = \dots$$

- Si μ est connu, $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ est exhaustive pour σ^2

Statistique exhaustive

- Quelles sont les lois permettant une statistique exhaustive ?

Théorème de Darmois

- soit une v.a. X / domaine de définition ne dépend pas de Θ
- soit X_1, \dots, X_n un échantillon
- une condition nécessaire et suffisante pour que l'échantillon admette une statistique suffisante est que la densité de X appartienne à la famille exponentielle :

$$f(x, \Theta) = \exp [a(x)\alpha(\Theta) + b(x) + \beta(\Theta)]$$

- de plus, si a bijective et continûment différentiable alors

$$T = \sum_{i=1}^n a(X_i) \text{ est une statistique exhaustive}$$

Statistique exhaustive

- Exceptions :
 - il est possible de trouver des statistiques exhaustives pour la loi uniforme même si le théorème de Darmois ne s'applique pas

S'il existe une statistique exhaustive U , alors l'estimateur T sans biais et de variance minimum d'un paramètre inconnu d'une loi dont la forme est supposée connue, ne dépend que de U !

Information de Fisher

- **Définition :** $I_n(\Theta) = E \left[\left(\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n, \Theta)}{\partial \Theta} \right)^2 \right]$

quantité d'information de Fisher apportée par un échantillon sur le paramètre Θ [si elle existe]

- **Propriétés** (si le domaine de définition de X ne dépend pas de Θ)
 - $I_n(\Theta) = -E \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \Theta^2} \right)$ + Conditions de Cramer Rao (CCR) vérifiées
 - **additivité :** $I_n(\Theta) = n I_1(\Theta)$ chaque observation apporte autant d'info.
 - **dégradation de l'information :** $I_T(\Theta) \leq I_n(\Theta)$
une statistique T apporte une quantité d'info inférieure ou égale à celle apportée par l'échantillon ... il y a égalité si T est exhaustive

Information de Fisher

- Exemple :
 - Calculer l'information apportée par une observation sur le paramètre μ d'une loi normale ou σ^2 est connu
 - On retrouve le fait que chaque observation apporte d'autant plus d'information que la dispersion est petite

Retour à nos estimateurs ...

- Problème : soit une v.a. X
 - définie par une famille paramétrée de lois $f(x, \Theta)$ [f connue]
 - observée sur x_1, \dots, x_n
 - comment trouver l'estimateur T sans biais de Θ de variance minimale ?
indice = notion de statistique exhaustive
- Une réponse : le théorème de Cramer-Rao
 - qui sous certaines **conditions** nous permet de
 - calculer la **borne** inférieure de la variance d'un estimateur sans biais
 - construire un estimateur **efficace** (i.e. celui qui atteindra cette borne min.)

Estimateur efficace

- Estimateur efficace = estimateur sans biais
 - vérifiant l'ensemble des conditions de Cramer-Rao
 - dont la variance est égale à la borne de Cramer-Rao
- Propriété :
 - Efficace \Rightarrow sans biais de variance minimale
- Attention :
 - Un estimateur efficace n'EXISTE pas toujours!!!
(à cause des conditions de Cramer-Rao)
 - Sans biais de variance minimale ~~\Rightarrow~~ efficace

Théorème de Cramer-Rao

- Soit \hat{u} un estimateur sans biais de $u(\Theta)$, si
 - le support de la loi de X est indépendant de Θ
 - $\frac{\partial L}{\partial \Theta}$ existe et est continue par rapport à Θ
 - $I_n(\Theta)$ l'information de Fisher est finie
 - $\frac{\partial L}{\partial \Theta}$ et $\hat{u} \frac{\partial L}{\partial \Theta}$ intégrables par rapport à Θ

conditions
de Cramer-Rao

Alors

$$\text{Var}(\hat{u}) \geq \frac{(u'(\Theta))^2}{I_n(\Theta)}$$

borne de Cramer-Rao

Estimateur efficace (le retour...)

- Si les conditions de Cramer-Rao sont vérifiées, alors \hat{u} est un estimateur efficace de $u(\Theta)$ ssi \exists une fonction A indépendante de X_1, \dots, X_n , telle que :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \Theta} (X_1, \dots, X_n, \Theta) = A(n, \Theta) (\hat{u} - u(\Theta))$$

- De plus, la variance de cet estimateur est : $Var(\hat{u}) = \frac{u'(\Theta)}{A(n, \Theta)}$

Exemples

- Soit une v.a. X de densité $f_X(x) = \Theta e^{-\Theta x}$ où $x \in (0, \infty)$ de paramètre inconnu Θ
 - Il n'existe pas d'*estimateur efficace* de Θ !
 - \bar{X} est un *estimateur efficace* de $1/\Theta$

Exemples

- Soit une v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, avec μ inconnu et σ^2 connu
 - \bar{X} est un *estimateur efficace* de μ