NOM : .... Prénom : .... Groupe : .....

D.S. de P3 du jeudi 16 Janvier 2025
Durée : 2h

INSCRIRE SON NOM, PRENOM, GROUPE EN HAUT DE CHAQUE FEUILLE
Une calculatrice non programmable, non graphique est autorisée.
Pour les élèves internationaux, les dictionnaires en papier non-annotés sont autorisés.
Les téléphones portables et montres connectées doivent être éteints et rangés dans les sacs.

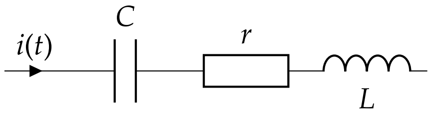
TOUTE APPLICATION NUMERIQUE EST PRECEDEE D'UN CALCUL LITTERAL
ET COMPORTE UNE UNITE.

Exercice 1 : Circuit bouchon

Questions préliminaires : RLC série

On connecte une résistance r, une bobine idéale d'inductance L et un condensateur de capacité C en série.

1) Donner l'impédance complexe équivalente $\underline{Z}_s$ de ce dipôle.



$$\underline{Z}_s = \underline{Z}_r + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C$$

$$\underline{Z}_s = r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$$

2) Montrer que cette impédance complexe peut se mettre sous la forme $\underline{Z}_s = r\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$. Préciser les expressions de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q.

$$\underline{Z}_s = r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$\underline{Z}_s = r\left(1 + j\left(\frac{L}{r}\omega - \frac{1}{rC\omega}\right)\right)$$

On identifie $Q\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{L}{r}\omega$ et $Q\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{rC\omega}$.

En multipliant les deux équations, on obtient $Q^2 = \frac{L}{r}\omega\frac{1}{rC\omega}$.

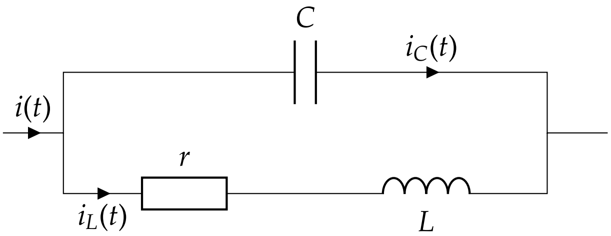
$$\boxed{Q = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

NOM : .... Prénom : .... Groupe : .....

Circuit bouchon

On place un circuit bouchon sur une ligne haute tension pour empêcher la propagation d'un courant $i(t)$ de haute fréquence à 100 kHz sur cette ligne.
Il est constitué d'un condensateur de capacité C ajustable placé en parallèle d'une bobine d'inductance L et de résistance interne r. On donne ci-dessous le schéma équivalent de ce circuit :



3) Montrer que l'impédance complexe équivalente $\underline{Z}$ de ce circuit peut se mettre sous la forme : $\underline{Z} = \frac{r}{jC\omega\underline{Z}_s}\left(1 + jQ\frac{\omega}{\omega_0}\right)$.

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_r + \underline{Z}_L}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{Z}_C + \underline{Z}_r + \underline{Z}_L}{\underline{Z}_C\left(\underline{Z}_r + \underline{Z}_L\right)}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_C\left(\underline{Z}_r + \underline{Z}_L\right)}{\underline{Z}_s}$$

$$\underline{Z} = \frac{(r + jL\omega)}{jC\omega\underline{Z}_s}$$

$$\underline{Z} = \frac{r}{jC\omega\underline{Z}_s}\left(1 + j\frac{L}{r}\omega\right)$$

$$\underline{Z} = \frac{r}{jC\omega\underline{Z}_s}\left(1 + jQ\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

4) On se place à la pulsation $\omega = \omega_0$. Montrer que dans ce cas, on a $|\underline{Z}| = r\,Q\sqrt{1+Q^2}$ et $Arg(\underline{Z}) = -\frac{\pi}{2}+\arctan Q$.

En prenant $\omega = \omega_0$, l'expression précédente s'écrit : $\underline{Z} = \frac{r}{jC\omega\underline{Z}_s}(1 + jQ)$ avec $\underline{Z}_s = r$.

On obtient :

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC\frac{1}{\sqrt{LC}}}(1 + jQ)$$

$$\underline{Z} = -j\sqrt{\frac{L}{C}}(1 + jQ)$$

$$\underline{Z} = -j\,Q\,r(1 + jQ)$$

NOM : .... **Prénom :** .... **Groupe :** .....

En prenant le module, on trouve $\boxed{|\underline{Z}| = r\,Q\,\sqrt{1+Q^2}}$. En prenant l'argument, on a $Arg(\underline{Z}) = Arg\,(-j\,Q\,r) + Arg\,(1+jQ)$ et on obtient bien $\boxed{Arg(\underline{Z}) = -\dfrac{\pi}{2} + \arctan Q}$.

5) Dans le cas $Q >> 1$, avec $\omega = \omega_0$, montrer que le circuit bouchon est équivalent à une résistance équivalente R_{eq} dont on donnera l'expression en fonction de r et Q.

Dans le cas $Q >> 1$, le module devient $|\underline{Z}| = r\,Q\,\sqrt{Q^2} = r\,Q^2$ et $\arctan Q = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne $Arg(\underline{Z}) = 0$.

On obtient donc $\underline{Z} = r\,Q^2$. Le circuit bouchon est équivalent à une résistance de valeur $\boxed{R_{eq} = r\,Q^2}$.

6) On impose la tension $e(t) = E\cos(\omega_0\,t)$ aux bornes du circuit. Avec les hypothèses précédentes ($Q >> 1$ et $\omega = \omega_0$), donner les expressions complexes de $\underline{i}_C$ et $\underline{i}_L$ en fonction de $\underline{e}$, r et Q. Montrer que $\underline{i} = 0$ et conclure sur le rôle du circuit bouchon.

$$\underline{i}_C = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}_C} = j\,C\,\omega_0\underline{e} = j\,C\,\frac{1}{\sqrt{L\,C}}\underline{e} = j\frac{1}{Q\,r}\underline{e}.$$

$$\underline{i}_L = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}_r + \underline{Z}_L} = \frac{\underline{e}}{r + j\,L\omega_0} = \frac{\underline{e}}{r\left(1 + j\frac{L}{r}\omega_0\right)} = \frac{\underline{e}}{r\,(1+j\,Q)}$$

Avec l'hypothèse $Q >> 1$, cette expression devient : $\underline{i}_L = \dfrac{\underline{e}}{r\,j\,Q} = -j\dfrac{\underline{e}}{r\,Q}$.

On trouve $\underline{i} = \underline{i}_C + \underline{i}_L = 0$.

A la pulsation ω_0, le courant est annulé. Le circuit bouchon empêche la propagation des signaux à cette pulsation.

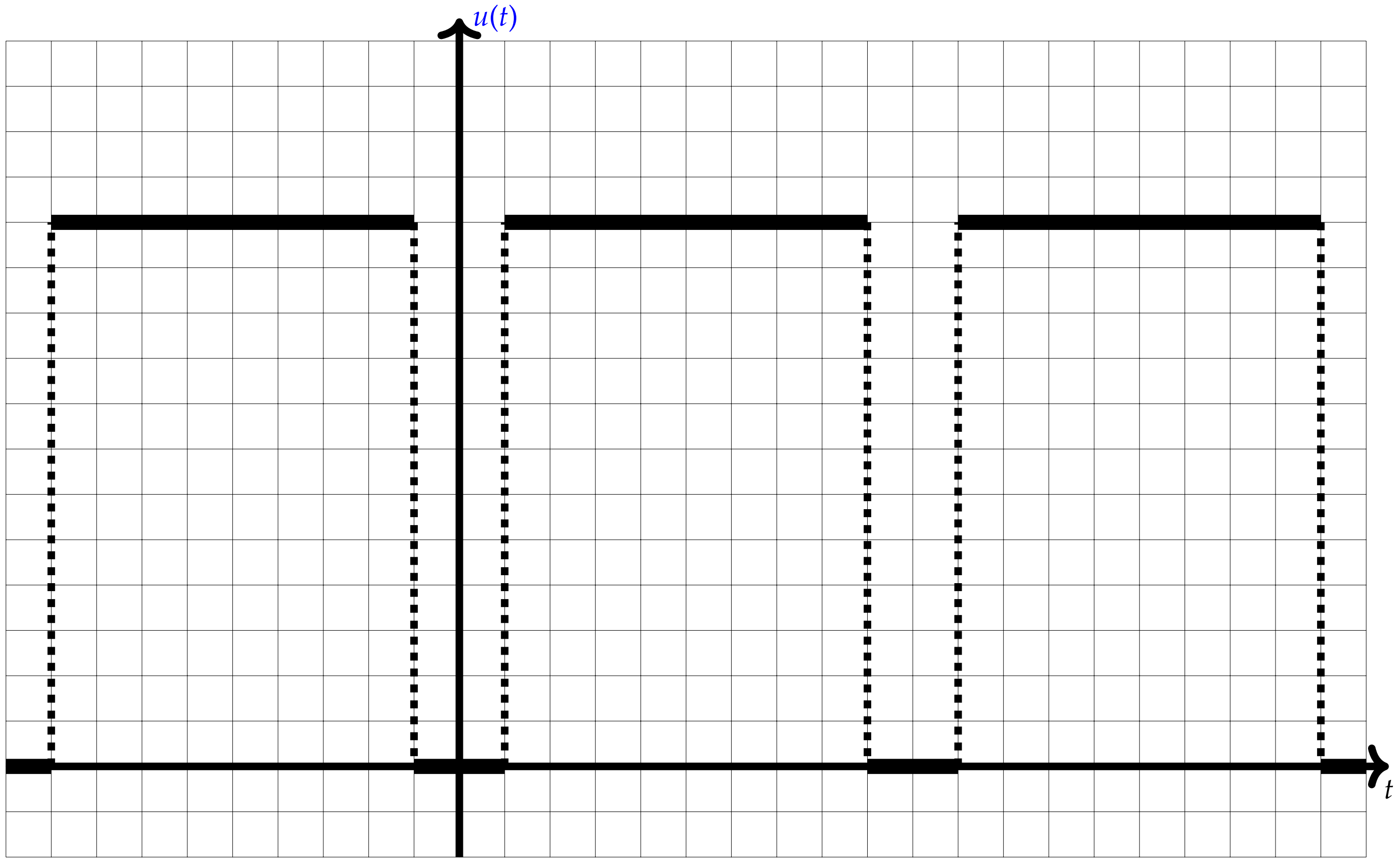
NOM : .... Prénom : .... Groupe : .....

Exercice 2 : Communication par courants porteurs en ligne

La communication par courants porteurs en ligne (ou CPL) permet de transmettre des informations en utilisant des conducteurs électriques en fonctionnement. Le principe des CPL consiste à superposer au réseau électrique un signal de haute fréquence et de basse énergie. Ce deuxième signal se propage sur l'installation électrique et peut être reçu et décodé à distance.

Partie A : Etude du signal

On donne ci-dessous le graphe temporel du signal haute fréquence $u(t)$ utilisé pour transmettre l'information. L'échelle horizontale est de 1µs/div et l'échelle verticale de 1V/div.



1) Mesurer la période de ce signal et en déduire sa fréquence f.

La période du signal est $T = 10$ µs et sa fréquence $f = 10^5$ Hz.

On donne le début de la décomposition spectrale de ce signal :

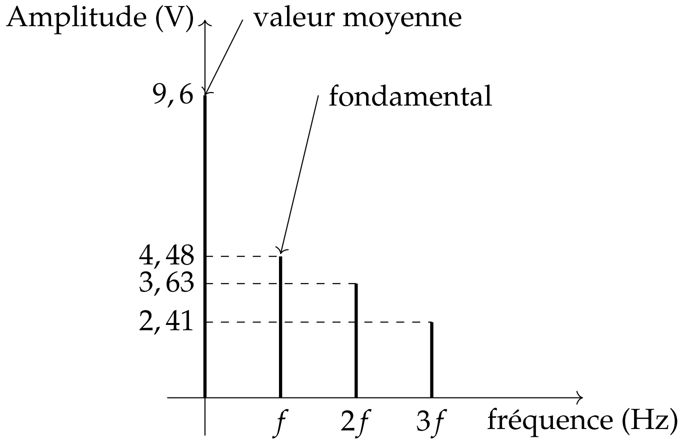
$$u(t) = \langle u \rangle + 4,48\cos(2\pi f t) + 3,63\cos(4\pi f t) + 2,41\cos(6\pi f t) + \ldots$$

2) Calculer la valeur moyenne du signal $u(t)$ à l'aide du graphe temporel.

On a $\langle u(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = \frac{1}{10} 12 \times 8 = 9,6$ V.

NOM : .... Prénom : .... Groupe : .....

3) Tracer le spectre du signal $u(t)$ en indiquant la valeur moyenne, le fondamental et les deux harmoniques suivants.



4) Calculer la valeur efficace U_{eff} du signal $u(t)$ à l'aide du graphe temporel.

On a $U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{10}12^2 \times 8} = 10,7$ V.

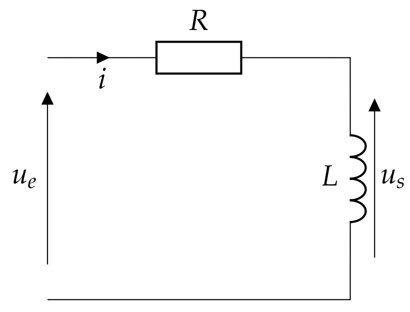
Ce signal $u(t)$ s'ajoute au signal du réseau électrique moyenne tension $e(t)$ de tension efficace E=20000 V à 50 Hz. On définit le taux de déformation α d'un signal par l'expression suivante : $\alpha = \frac{\sqrt{U_{eff}^2 - <u>^2}}{E}$. On considère que le signal $e(t)$ n'est pas déformé par le signal $u(t)$ si $\alpha < 0,1\%$.

5) Calculer la valeur de α et conclure.

On trouve $\alpha = 0,024\%$. Le signal n'est pas déformé.

Partie B : Etude du filtre

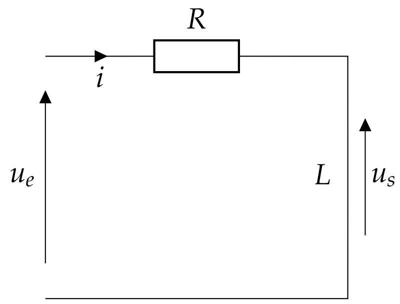
On utilise le filtre ci-dessous pour récupérer le signal carré précédent.



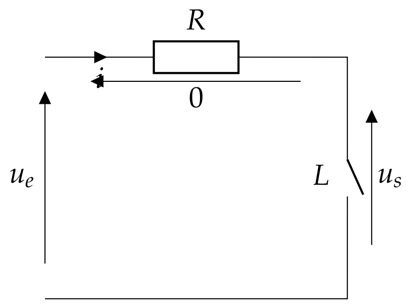
NOM : .... **Prénom :** .... **Groupe :** .....

6) Par une étude qualitative, donner la nature de ce filtre.

•On se place en basses fréquences, la bobine est équivalente à un fil et on obtient $u_s = 0$.



•On se place en hautes fréquences, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert et, comme $i = 0$, on obtient $u_s = u_e$.



Le circuit annule les signaux de basses fréquences et laisse inchangés les signaux de hautes fréquences. C'est un filtre passe-haut.

7) Donner l'expression de la fonction de transfert de ce filtre en fonction de R et L. Préciser l'ordre du filtre.

On utilise un pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_L} + \underline{Z_R}} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}$$

Le dénominateur est un polynôme de degré 1, c'est un filtre passe-haut d'ordre 1.

8) Rappeler la définition de la bande passante d'un filtre. Déterminer l'expression de la pulsation de coupure et la bande passante de ce filtre.

La bande passante est définie comme l'ensemble des pulsations ω tel que $|\underline{H}(\omega)| \geq \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$ avec H_{max} le maximum de $|\underline{H}(\omega)|$.

Pour le circuit précédent, $|\underline{H}(\omega)| = \dfrac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{L\omega}\right)^2}}$.

Le maximum de cette fonction est $H_{max} = 1$.

On doit donc résoudre l'inéquation :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{L\omega}\right)^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$1 + \left(\frac{R}{L\omega}\right)^2 \leq 2$$

$$\omega \geq \frac{R}{L}$$

NOM : .... Prénom : .... Groupe : .....

On retrouve que le circuit est un filtre passe-haut. Sa pulsation de coupure est $\omega_c = \frac{R}{L}$ et sa bande passante $[\omega_c; +\infty]$.

9) Démontrer les expressions des asymptotes du diagramme de Bode en gain et en phase de ce filtre.

La fonction de transfert peut se réécrire : $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + \frac{\omega_c}{j\omega}}$.

On se place en basses fréquences $\omega << \omega_c$, c'est à dire $\frac{\omega_c}{\omega} >> 1$.
La fonction de transfert devient : $\underline{H} \approx \dfrac{1}{\frac{\omega_c}{j\omega}} = j\dfrac{\omega}{\omega_c}$.

On a $G_{dB} = 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = 20\log\omega - 20\log\omega_c$.
On obtient dans un diagramme semi-logarithmique une droite de pente +20 dB/décade.

On a $\phi = +\frac{\pi}{2}$. C'est une asymptote horizontale.

On se place en hautes fréquences $\omega >> \omega_c$, c'est à dire $\frac{\omega_c}{\omega} << 1$.
La fonction de transfert devient : $\underline{H} \approx 1$.

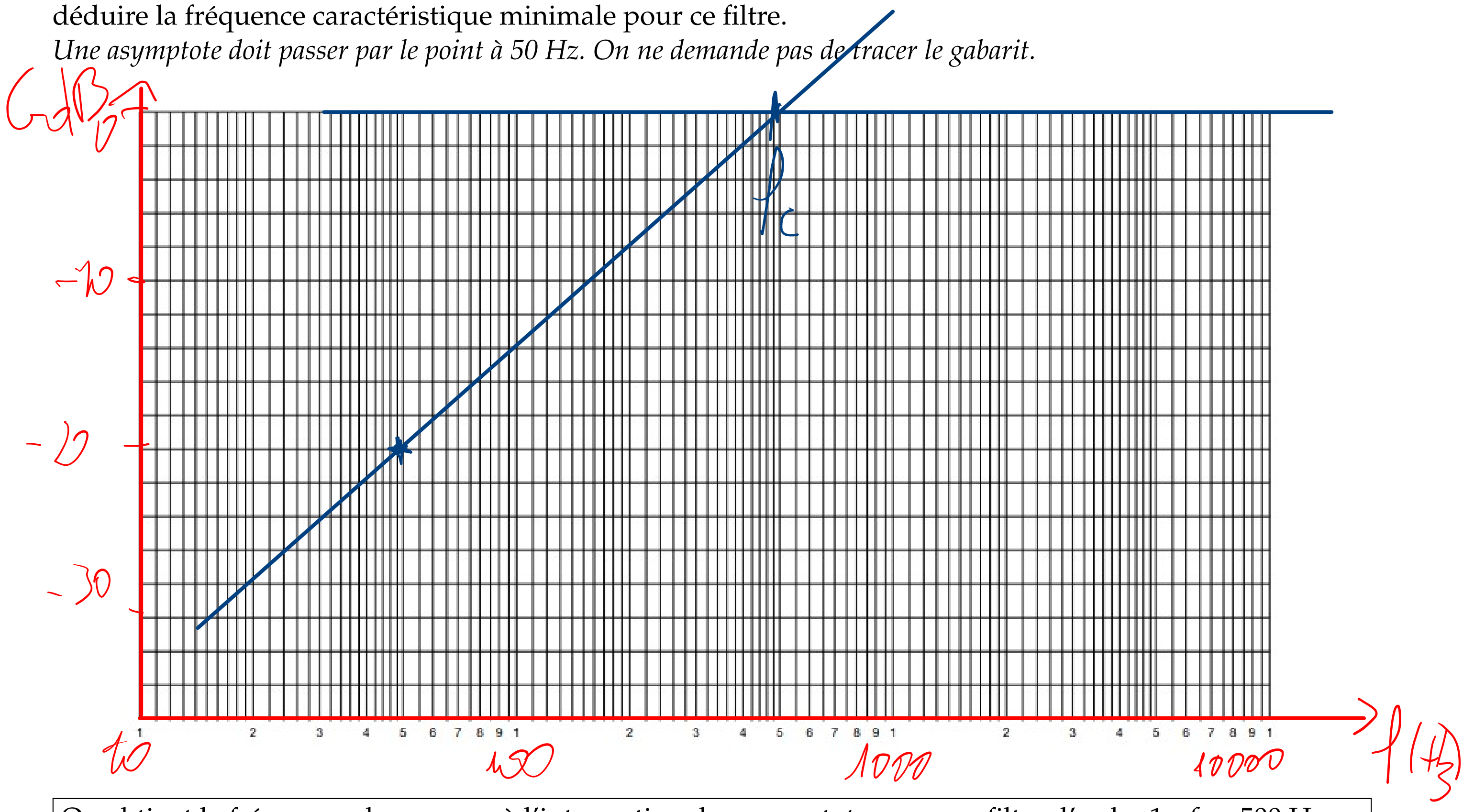
On a $G_{dB} = 20\log 1 = 0$.
On obtient dans un diagramme semi-logarithmique une asymptote horizontale à 0 dB.

On a $\phi = 0$. C'est une asymptote horizontale.

Partie C : Application du filtre au signal précédent

On souhaite récupérer le signal carré $u(t)$. Ce signal ne doit donc pas être attenué tandis que le signal $e(t)$ à 50 Hz doit être atténué d'au moins 20 dB.

10) Sur le diagramme ci-dessous, placer le point à 50 Hz. Tracer les asymptotes du filtre précédent. En déduire la fréquence caractéristique minimale pour ce filtre.
Une asymptote doit passer par le point à 50 Hz. On ne demande pas de tracer le gabarit.



On obtient la fréquence de coupure à l'intersection des asymptotes pour ce filtre d'ordre 1 : $f_c = 500$ Hz.

NOM : .... Prénom : .... Groupe : .....

11) On donne $R = 4\,\Omega$ et $L = 1$ mH. Le filtre convient-il ?

On calcule $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L} = \frac{4}{2\pi \times 10^{-3}} = 637$ Hz.
On obtient une fréquence légérement supérieure à la fréquence minimale trouvée à la question précédente.
Le filtre convient.