

Corrigé de l'EC5: Étude entropique d'un cycle

Énoncé

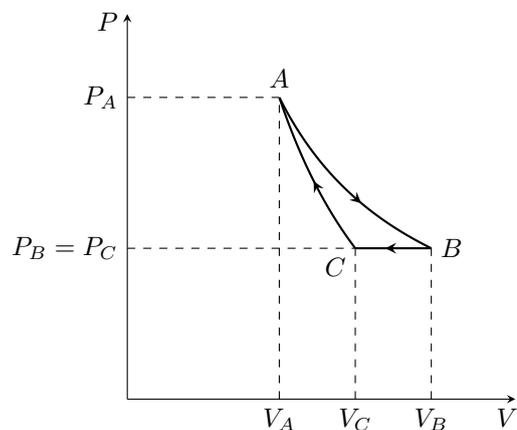
Considérons une quantité $n = 1,0$ mol de gaz supposé parfait, de coefficient $\gamma = 1,4$, subissant successivement les transformations suivantes :

- * $A \rightarrow B$: détente isotherme lente de $P_A = 2,0$ bar et $T_A = 300$ K jusqu'à $P_B = 1,0$ bar ;
- * $B \rightarrow C$: évolution isobare jusqu'à $V_C = 20,5$ L et T_C en restant en contact avec un thermostat à la température T_C tout au long de la transformation ;
- * $C \rightarrow A$: compression adiabatique réversible.

1. Représenter ce cycle dans un diagramme de Clapeyron (P, V).
2. Redémontrer les formules de variation d'entropie ΔS en fonction des variables T et P puis V et P dans le cas d'un gaz parfait.
3. Déterminer les entropies échangées, créées et la variation d'entropie lors de la transformation $A \rightarrow B$ puis faire les applications numériques. Commenter.
4. Déterminer de même les entropies échangées, créées et la variation d'entropie lors des deux autres transformations puis faire les applications numériques. Ce cycle, tel que décrit plus haut, pourrait-il se faire dans le sens inverse ?
5. Représenter le cycle dans le diagramme entropique (T, S).

Correction

1. La transformation $B \rightarrow C$ est isobare, il s'agit donc d'une droite horizontale et $P_B = P_C$.
On a $P_A > P_B$.
L'adiabatique est plus pentue dans le diagramme de Clapeyron que l'isotherme, on trouve donc que le point C est à gauche du point B sur le diagramme.



2. D'après la seconde identité thermodynamique, on a $dH = TdS + VdP$.

$$\text{Donc } dS = \frac{1}{T}dH - \frac{V}{T}dP.$$

Le gaz étant supposé parfait, on a, d'après la seconde loi de Joule, H ne dépend que de T , donc $dH = C_P dT$.

$$\text{D'après la loi des gaz parfaits, } \frac{V}{T} = \frac{nR}{P}.$$

$$\text{Finalement, on a } dS = \frac{C_P}{T}dT - \frac{nR}{P}dP.$$

Puisque le gaz est supposé parfait, on a $C_P = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}$ constant de T .

$$\text{On a donc } dS = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P}.$$

En intégrant entre l'état initial et l'état final, on a $\Delta S = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) - nR \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right)$.

D'après la loi des gaz parfaits, on a $PV = nRT$.

$$\text{Donc } \frac{T_f}{T_i} = \frac{nRT_f}{nRT_i} = \frac{P_f V_f}{P_i V_i}.$$

$$\text{Donc } \Delta S = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right) + \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) - nR \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right).$$

$$\text{Finalement, on a } \Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right) + \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right).$$

3. La transformation $A \rightarrow B$ est isotherme, donc $T_A = T_B$. D'après la formule obtenue lors de la question précédente, on a $\Delta S_{A \rightarrow B} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$.

$$\text{Donc } \Delta S_{A \rightarrow B} = 5,8 \text{ J.K}^{-1}.$$

Le gaz est supposé parfait, donc, d'après la première loi de Joule, U ne dépend que de T .

La transformation étant isotherme, on trouve donc que $\Delta U_{A \rightarrow B} = U(T_B) - U(T_A) = U(T_A) - U(T_A) = 0$.

D'après le premier principe de la thermodynamique, on a $\Delta U = W + Q$.

$$\text{Donc } Q_{A \rightarrow B} = -W_{A \rightarrow B}.$$

Or $\delta W = -P_{ext}dV = -PdV$ car la transformation est lente.

$$\text{Le gaz étant supposé parfait, on a } \delta W = -nRT \frac{dV}{V}.$$

$$\text{La transformation étant isotherme, on a } \delta W = -nRT_A \frac{dV}{V}.$$

$$\text{En intégrant, on a alors } W_{A \rightarrow B} = -nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right).$$

$$\text{Donc } Q_{A \rightarrow B} = -W_{A \rightarrow B} = nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right).$$

Lors d'une transformation isotherme à la température T_A , le gaz est au contact d'un thermostat de température T_A .

$$\text{Donc } \delta S_{A \rightarrow B}^{ech} = \frac{\delta Q_{A \rightarrow B}}{T_A}.$$

$$\text{En intégrant, on a } S_{A \rightarrow B}^{ech} = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right).$$

D'après la loi des gaz parfaits, $V = \frac{nRT}{P}$. Donc, la transformation étant isotherme, $\frac{V_B}{V_A} = \frac{P_A}{P_B}$.

$$\text{Finalement, } \delta S_{A \rightarrow B}^{ech} = -nR \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right).$$

$$\text{Donc } S_{A \rightarrow B}^{ech} = 5,8 \text{ J.K}^{-1}.$$

D'après le second principe de la thermodynamique, on a $\Delta S = S^{ech} + S^{cr}$.

$$\text{Donc } S_{A \rightarrow B}^{cr} = \Delta S_{A \rightarrow B} - S_{A \rightarrow B}^{ech}.$$

$$\text{Finalement } S_{A \rightarrow B}^{cr} = 0 \text{ J.K}^{-1}.$$

La transformation est donc réversible, comme on a déjà pu le montrer d'une transformation isotherme lente lors du TD.

4. D'après la loi du gaz parfait, on a $V_B = \frac{nRT_B}{P_B}$.

$$\text{Or } A \rightarrow B \text{ est isotherme, donc } V_B = \frac{nRT_A}{P_B} = 25 \text{ L}.$$

$$\text{La transformation } B \rightarrow C \text{ étant isobare, on trouve } \Delta S_{B \rightarrow C} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right).$$

$$\text{Donc } \Delta S_{B \rightarrow C} = -5,8 \text{ J.K}^{-1}.$$

$$\text{On a également } \delta W = -P_B dV.$$

$$\text{En intégrant, on trouve } W_{B \rightarrow C} = -P_B(V_C - V_B) = 450 \text{ J}.$$

$$\text{D'après la loi des gaz parfaits, } T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = 246 \text{ K}.$$

D'après la première loi de Joule, vérifiée car le gaz se comporte comme un gaz parfait, U ne dépend que de T , donc $dU = C_V dT = \frac{nR}{\gamma-1} dT$.

$$\text{En intégrant entre } B \text{ et } C, \text{ on trouve } \Delta U_{B \rightarrow C} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_C - T_B) = -1,1 \text{ kJ}.$$

D'après le premier principe, on a $\Delta U = W + Q$.

$$\text{Donc } Q_{B \rightarrow C} = \Delta U_{B \rightarrow C} - W_{B \rightarrow C} = -1,6 \text{ kJ}.$$

Lors de la transformation $B \rightarrow C$, le gaz est au contact avec un thermostat à la température T_C . On a donc $\delta S_{B \rightarrow C}^{ech} = \frac{\delta Q_{B \rightarrow C}}{T_C}$.

En intégrant, on a $S_{B \rightarrow C}^{ech} = \frac{Q_{B \rightarrow C}}{T_C}$.

Finalement $S_{B \rightarrow C}^{ech} = -6,4 \text{ J.K}^{-1}$.

D'après le second principe, $S_{B \rightarrow C}^{cr} = \Delta S_{B \rightarrow C} - S_{B \rightarrow C}^{ech}$.

Donc $S_{B \rightarrow C}^{cr} = 0,6 \text{ J.K}^{-1}$.

La transformation est donc irréversible.

On remarque que, dans le sens contraire, on trouverait de même que précédemment $\Delta S_{C \rightarrow B} = 5,8 \text{ J.K}^{-1}$.

De plus, si l'on a toujours un thermostat à la température T_C , on aurait, de même que précédemment, $S_{C \rightarrow B}^{ech} = 6,4 \text{ J.K}^{-1}$.

Par le second principe, on aurait alors $S_{C \rightarrow B}^{cr} = -0,6 \text{ J.K}^{-1} < 0$ ce qui est impossible !

Pour parcourir ce cycle dans l'autre sens, il faudrait que la transformation $C \rightarrow B$ se fasse en contact avec un thermostat à la température T_B .

La transformation $C \rightarrow A$ étant adiabatique, on a $S_{C \rightarrow A}^{ech} = 0 \text{ J.K}^{-1}$. Elle est également réversible, donc

$S_{C \rightarrow A}^{cr} = 0 \text{ J.K}^{-1}$.

D'après le second principe, on a finalement $\Delta S_{C \rightarrow A} = 0 \text{ J.K}^{-1}$.

5. Une isotherme est une droite horizontale dans le diagramme (T, S) .

Une adiabatique réversible est une isentropique (voir question 4), donc une droite verticale dans le diagramme (T, S) .

Lors de l'isobare, on a, d'après la formule montrée en question 2, $\Delta S = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$.

Donc T est une fonction de S de la forme $K_1 e^{K_2 S}$ avec K_1 et K_2 des constantes, $K_2 > 0$. On trouve ainsi le graphe ci-contre.

