Corrigé de l'EC3: Mesure de γ

Énoncé

Considérons un cylindre de section $S = 2,0\text{cm}^2$ fermé par un piston de masse $m = 20\text{g}$ pouvant coulisser sans frottement initialement bloqué par des taquets.
Le volume du gaz (supposé parfait) dans le cylindre est alors $V_0 = 10\text{L}$ et est à pression $P_0 = 1,0$ bar égale à la pression extérieure. L'axe (Oz) est vertical orienté vers le bas et soit z l'altitude du piston. On a $z = 0$ dans la position initiale.
À $t = 0$, le piston est libéré sans vitesse initiale. On note P la pression dans le cylindre et on suppose la transformation adiabatique et réversible.

1. Faire le bilan des forces s'exerçant sur le piston.
2. Sachant que le cylindre n'est pas calorifugé, quelle hypothèse peut on faire permettant de justifier que la transformation est adiabatique ? En déduire l'expression de la pression P en fonction de la position z du piston.

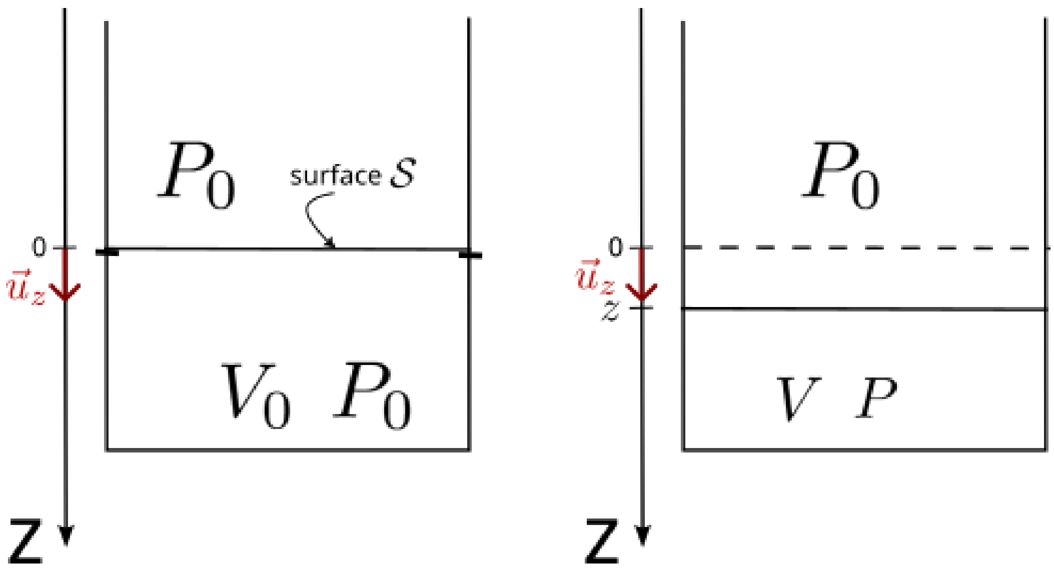
On admettra que, pour de faibles valeurs de z, la pression dans le cylindre est donnée par : $P = P_0\left(1 + \frac{\gamma S}{V_0} z\right)$, avec γ le rapport isentropique.

3. Déterminer l'équation différentielle décrivant l'évolution du piston au cours du temps et en déduire la période T des oscillations.
4. On mesure une période $T = 1,2\text{s}$. Donner la valeur de γ. Commenter.

Rappel : Lorsqu'un mouvement est régit par une équation différentielle de la forme $\ddot{y} + ay = 0$ alors ce mouvement est sinusoïdal de pulsation $\omega_0^2 = a$.

Correction

1. On se placera par la suite en référentiel terrestre supposé galiléen.
   Le système considéré est le piston.
   Les forces s'exerçant sur le piston sont :
   * Le poids du piston $\vec{P} = m g \vec{u}_z$.
   * La pression de l'air extérieur sur le piston $\vec{F_0} = P_0 S \vec{u}_z$.
   * La pression de l'air intérieur sur le piston $\vec{F} = -PS\vec{u}_z$.



2. On suppose que la transformation est suffisamment rapide pour que les transferts thermiques n'aient pas le temps de se faire. On suppose donc la transformation adiabatique.

   La transformation étant également réversible, on peut appliquer la loi de Laplace, on a donc $PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma$.

   Puisque le volume occupé par l'air est un cylindre, on a $V = V_0 - Sz$.

   Finalement, on a $\boxed{P = P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 - Sz}\right)^\gamma}$.

   On pourra noter que les deux hypothèses d'une transformation est suffisamment rapide pour que les transferts thermiques n'aient pas le temps de se faire et réversible (qui implique lent) peuvent sembler contradictoire.

   Cependant ce n'est pas le cas. Pour le comprendre, il faut considérer le temps caractéristique que met chacune des transformations à se faire. En pratique, dans notre cas, le transfert thermique au travers de la paroi du cylindre et du piston est plus lent que le temps caractéristique d'homogénéisation dans le cylindre. La transformation peut donc bien être lente du point de vue du gaz dans le cylindre qui évolue d'un état d'équilibre à un autre état d'équilibre tout en étant rapide du point de vue des échanges thermiques avec l'extérieur qui ne se font que peu voire pas.

3. D'après le PFD appliqué au piston et projeté sur $\vec{u}_z$, on a $m\ddot{z} = mg + P_0 S - PS$.

   D'après la relation proposée pour P pour de petites valeurs de z, on a $m\ddot{z} = mg - \frac{P_0 \gamma S^2}{V_0} z$.

   On a donc $\ddot{z} + \frac{P_0 \gamma S^2}{m V_0} z = g$.

   On trouve alors un système oscillant de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{P_0 \gamma S^2}{m V_0}}$.

   On a finalement $\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{m V_0}{P_0 \gamma S^2}}}$.

4. On a $\gamma = \frac{4\pi^2 m V_0}{S^2 P_0 T^2}$.

   Finalement $\boxed{\gamma = 1,4}$. C'est une valeur classique de γ (celle d'un gaz parfait diatomique).