Largeur de la bande passante d'un filtre passe-bande d'ordre 2 - Démonstration

On écrit la fonction de transfert d'un filtre passe-bande d'ordre 2 :

$$\underline{H} = \frac{A_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

Son module s'écrit : $|\underline{H}| = \dfrac{A_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$.

La bande passante est l'ensemble des fréquences telles que $|\underline{H}| \geq \dfrac{H_{max}}{\sqrt{2}}$.

Le maximum du module est $H_{max} = A_0$.

Pour trouver les pulsations de coupure, on doit résoudre l'équation :

$$|\underline{H}(x)| = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{A_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$$

$$1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 2$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{Q^2}$$

En prenant la racine carrée de cette équation, on a deux équations possibles :

$$\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{Q} \qquad\qquad \left(x - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{Q}$$

$$x^2 - 1 = \frac{x}{Q} \qquad\qquad x^2 - 1 = -\frac{x}{Q}$$

$$x^2 - \frac{x}{Q} - 1 = 0 \ (1) \qquad\qquad x^2 + \frac{x}{Q} - 1 = 0 \ (2)$$

Chacune de ces deux équations du second degré admet deux solutions. On cherche une pulsation positive. On ne va donc garder que la solution positive de chacune de ces équations.

Soient x_{c1} la première pulsation de coupure, solution positive de l'équation (1) et x_{c2} la deuxième pulsation de coupure, solution positive de l'équation (2). On a donc :

$$x_{c1}^2 - \frac{x_{c1}}{Q} - 1 = 0 \ (1) \qquad\qquad x_{c2}^2 + \frac{x_{c2}}{Q} - 1 = 0 \ (2)$$

On écrit la différence (2) - (1) et on obtient :

$$x_{c2}^2 - x_{c1}^2 + \frac{x_{c2}}{Q} + \frac{x_{c1}}{Q} = 0$$

$$(x_{c2} - x_{c1})(x_{c2} + x_{c1}) + \frac{1}{Q}(x_{c2} + x_{c1}) = 0$$

$$x_{c2} - x_{c1} = -\frac{1}{Q}$$

On en déduit donc que $x_{c2} < x_{c1}$, donc la bande passante est l'intervalle $[x_{c2}; x_{c1}]$ et la largeur de la bande passante s'écrit $\Delta x = x_{c1} - x_{c2} > 0$.

On en déduit finalement : $\boxed{\Delta x = \frac{1}{Q}}$.

Par définition de la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, soit $\Delta x = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$.

On a par ailleurs $\omega = 2\pi f$, soit $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ et $\Delta x = \frac{\Delta f}{f_0}$.

ω_0 est la pulsation propre du filtre et $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ la fréquence propre du filtre.

Finalement, la bande passante s'écrit en pulsation : $\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$ et en fréquence $\boxed{\Delta f = \frac{f_0}{Q}}$