Chapitre 9 – La récursivité

Concept fondamental en mathématiques et en informatique : manière particulière d'appréhender certains problèmes.

Généralités

- Un module (procédure ou fonction) récursif est un module qui s'appelle lui-même : il est *défini en référence à lui-même*.
- Un module ne peut pas être défini uniquement en référence à lui-même sans qu'on introduise de définition circulaire.

  → *condition de terminaison*
- Pour une récursivité qui boucle indéfiniment, l'arrêt se fait quand toute la mémoire disponible est utilisée.
- Le calcul effectif d'un module récursif s'effectue à partir du moment où on a atteint le point d'appui.
- La suite des appels d'un module récursif est une pile :
  - à chaque appel, le contexte d'exécution (les paramètres effectifs, les variables locales et l'adresse de retour) est empilé sur la pile (zone de la mémoire),
  - après l'exécution du module, on retourne à l'adresse au sommet de la pile et on désempile.

Récursivité fondée sur une relation de récurrence

Pour l'évaluation d'une suite récurrente, on a le choix entre un algorithme itératif et un algorithme récursif

Exemple 1 : la fonction factorielle.

$u_o = 1$

$u_n = n^* u_{n-1}$ si $n>0$

```
Fonction fac (n : entier) : entier
Var i, f : entier
Début
     f←1
     Pour i←2 à n Inc +1 Faire
          f←i*f
     FinPour
retourne(f)
Fin
```

```
Fonction fac (n : entier) : entier
Var f : entier
Début
     Si n=0
          Alors f←1
          Sinon f←n*fac(n-1){@2}
     FinSi
retourne(f)
Fin
```

Pile pour l’appel de fac(3)

écrire(fac(3)){@1}

~~@2 ; n=0~~
~~@2 ; n=1~~
~~@2 ; n=2~~
~~@1 ; n=3~~

f = 3*(2*(1*(1))) = 6

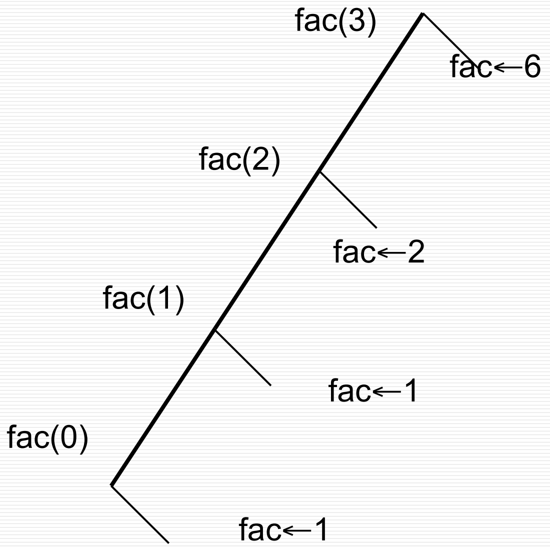
Arborescence des appels récursifs

On peut visualiser les différents appels réalisés par un graphe *nommé arborescence des appels récursifs*

- le premier appel est extérieur et correspond au seul sommet du graphe qui n'a pas de prédécesseur (racine),
- chaque sommet du graphe correspond à un appel de l'algorithme et est identifié par le nom du module exécuté avec le contexte d'exécution,
- il existe un arc entre deux sommets X et Y ssi l'exécution qui correspond au sommet X engendre un nouvel appel correspondant au sommet Y.

Arborescence des appels récursifs

- On peut enrichir les graphes des appels en indiquant les actions réalisées sur chaque version exécutée.



- L'intérêt de la récursivité se justifiera surtout par une nouvelle manière d'aborder les problèmes.

Suite de Fibonacci

Exemple 2 : la suite de Fibonacci

$u_0 = u_1 = 1$

$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ si $1<n$

```
Fonction fibo (n : entier) : entier
Const max = 10
Type tab = tableau[1..max] d'entier
Var      i : entier
t : tab
Début
t[0]←1
t[1]←1
Pour i←2 à n Inc +1 Faire
t[i]←t[i-1]+t[i-2]
    FinPour
retourne(t[n])
Fin
```

```
Fonction fibo (n : entier) : entier
Var f : entier
Début
Si n<=1
Alors f←1
Sinon f←fibo(n-1){@2}+fibo(n-2){@3}
FinSi
retourne(f)
Fin
```

Appel de fibonacci(4)

écrire(fibo(4)){@1}

~~@3 ; n=0~~

~~@2 ; n=1~~

~~@3 ; n=2~~

~~@3 ; n=1~~

~~@3 ; n=0~~

~~@2 ; n=1~~

~~@2 ; n=2~~

~~@2 ; n=3~~

~~@1 ; n=4~~

fibo = 1+1+1+1+1=5

Sommes de 1 : peu performant car il y a répétition du calcul, la méthode est non optimale.

Appel de fibonacci(4)

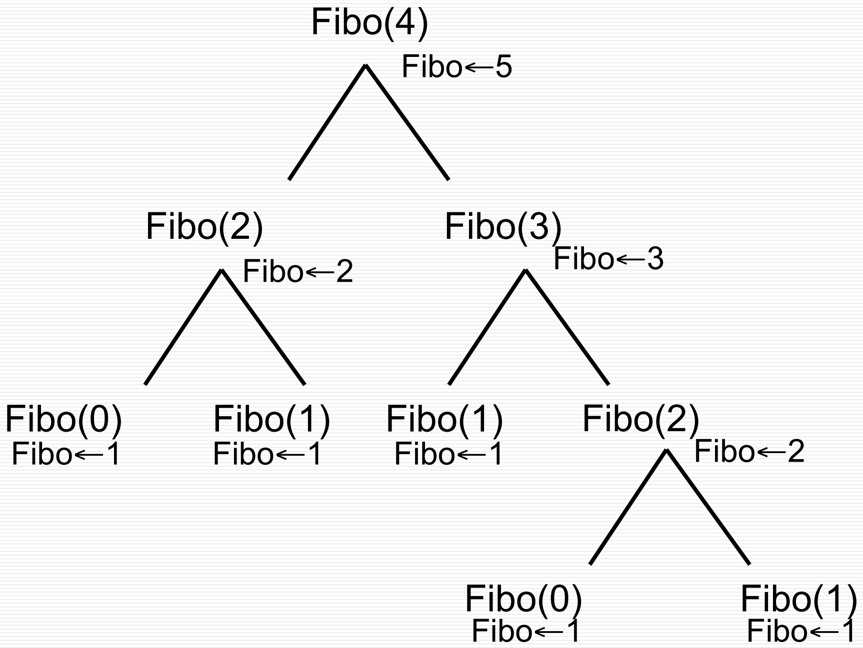


Schéma général d'un algorithme récursif

- Algorithmes récursifs ne découlant pas d'une suite récurrente.
- Dans un algorithme récursif, on distingue deux parties : la condition de terminaison (point d'appui) et l(es)'appel(s) récursif(s).

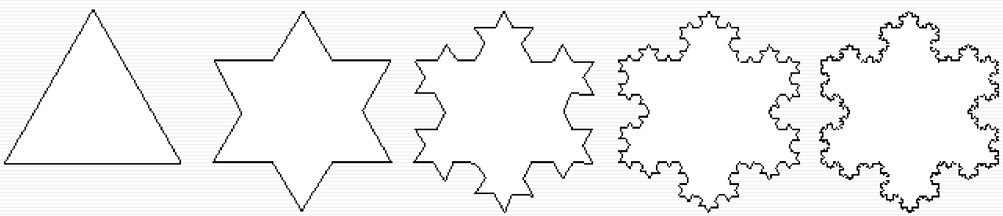
```
Module A(p1,..,pn)
Début
Si cond
        Alors I1...
        Sinon  I2
               A(f(p1,..,pn))
            I3
            A(g(p1,..,pn))
            ...
            Im
FinSi
Fin
```

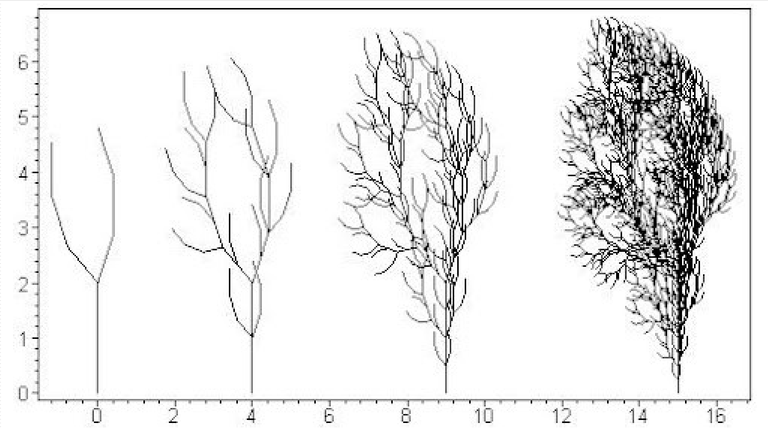
Définitions

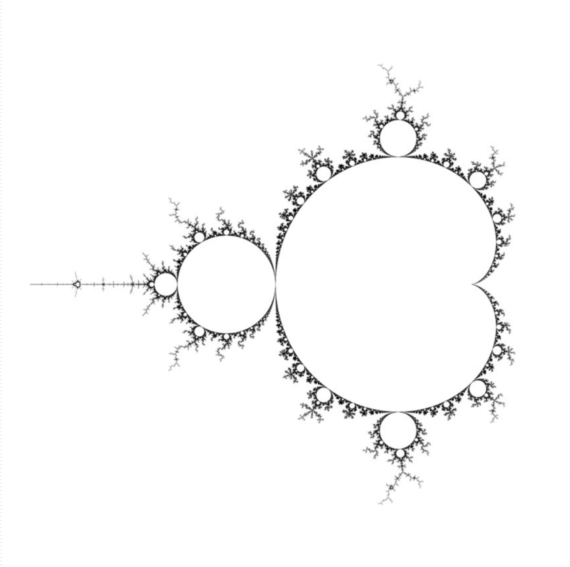
- Un algorithme est dit *simplement récursif* s'il ne contient qu'un seul appel récursif.
- Un appel récursif est *terminal* s'il n'est jamais suivi par l'exécution d'instructions dans le module.
- Une récursivité est *indirecte* ou *croisée* quand un module A sans appel récursif appelle un module B qui appelle A.

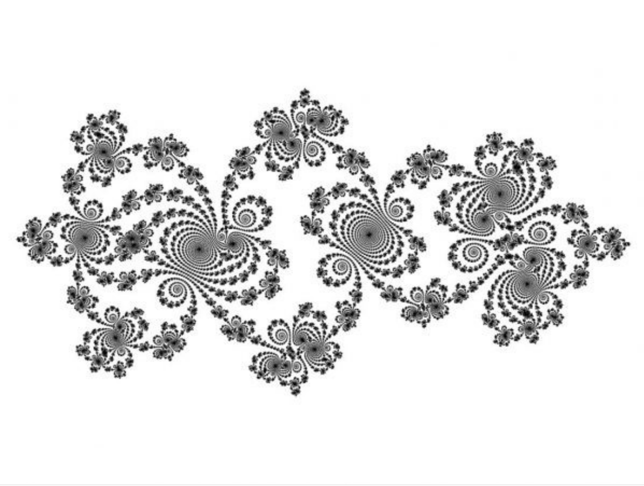
Applications : les fractales

https://youtu.be/zXTpASSd9xE?t=68









Applications : tours de Hanoï