INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES ROUEN NORMANDIE

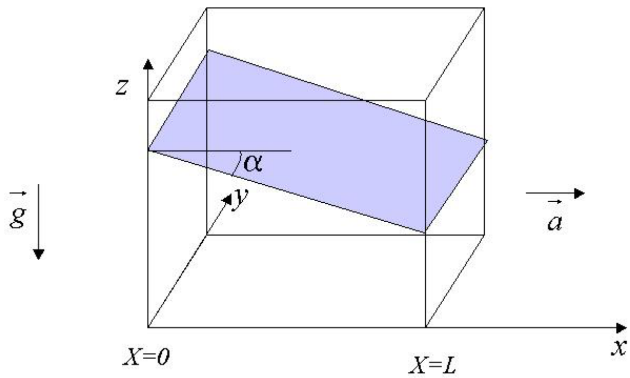
Devoir Surveillé de Mécanique des fluides.

EC P8
J. Yon
19/06/24
durée : 1h30

Seules les calculatrices sont autorisées.

Exercice 1. Problème rapide de statique des fluides (7 points)

*Un aquarium cubique (de côté **L**) à demi rempli d'eau de masse volumique **ρ** est placé dans une voiture. L'accélération constante $\vec{a}$ de cette voiture impose à l'interface plane eau-air un angle **α** avec le plan horizontal. On se propose de déterminer cet angle.*



<u>Rappel de mécanique :</u> on considère un référentiel ℛ en translation rectiligne accélérée d'accélération $\vec{a}$ par rapport à un référentiel galiléen. Un point matériel M de masse m en mouvement dans ℛ subit une force d'inertie d'entrainement qui s'écrit : $\overrightarrow{F_{ie}} = -m\vec{a}$

Données numériques : $\rho = 1$ *Kg/L ;* $a = 2\ m/s^2$ *;* $g = 10 m/s^2$

1.5 pts

1. Préciser le système étudié ainsi que le référentiel d'étude. Justifier alors l'emploi du principe fondamental de la statique.
   a. ***Référentiel*** : lié à l'aquarium, fixe dans la voiture (non galiléen)
   b. ***Système*** : le fluide contenu dans l'aquarium
   c. ***Justification du PFS*** : Dans le référentiel non galiléen, le fluide est statique. L'emploi du PFS est justifié par la prise en compte des forces d'inerties

1 pt

2. Exprimer les forces de volume (attraction gravitationnelle et forces d'inerties) en [N/m3].

$$\overrightarrow{F_{vg}} = -\rho g \overrightarrow{U_z} \text{ et } \overrightarrow{F_{vi}} = -\rho a \overrightarrow{U_x}$$

1.5 pts

3. A l'aide du principe fondamental de la statique, déterminer l'équation des isobares et en particulier de l'interface du fluide. Vous exprimerez alors la hauteur de l'interface z_i en fonction de la distance x du bord du bocal. On ne vous demande pas d'expliciter la constante d'intégration.

$$\sum \overrightarrow{F_v} = \overrightarrow{grad}(P)$$

$$\text{Soit} \begin{vmatrix} -\rho a \\ 0 \\ -\rho g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Par intégration, on trouve $P + \rho a x + \rho g z = C$

On en déduite qu'à l'interface, $z_i(x) = \frac{C - P_o - \rho a x}{\rho g}$

2 pts

4. En déduire l'expression analytique de l'angle $\boldsymbol{\alpha}$ en fonction des données du problème.

$$\text{On voit que } \tan(\alpha) = \frac{z_i(0)-z_i(L)}{L} = \frac{\frac{C-P_O}{\rho g}-\frac{C-P_O-\rho a L}{\rho g}}{L} = \frac{a}{g}$$

$$\text{Donc } \alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{a}{g}\right)$$

1 pt

5. Donner la valeur numérique de l'angle $\boldsymbol{\alpha}$ en degrés.

$$\alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{2}{10}\right) = 11{,}3°$$

Exercice 2. Problème de cinématique des fluides (7 points)

Considérons un écoulement d'eau plan défini par le champ de vitesse eulérien suivant, avec $u_0 = 1\ ms^{-1}$, une constante de vitesse et L une longueur :

$$\vec{U} = \left| \begin{array}{c} \dfrac{u_0}{2 + cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)} \\ -\dfrac{u_0}{L}\dfrac{2\pi y\, sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{\left(2 + cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right)^2} \\ 0 \end{array} \right.$$

1 pt

1. L'écoulement ainsi défini est-il stationnaire et incompressible ?
Il n'y a pas de dépendance explicite au temps, l'écoulement est donc stationnaire. De plus, le calcul de $div(\vec{U}) = 0$ montre que le fluide est incompressible.

1 pt

2. Rappeler la définition d'une ligne de courant. Que peut-on donc dire des trajectoires et des lignes de courant ?
Une ligne de courant est en tout point de l'espace colinéaire au champ de vecteur vitesse. L'écoulement étant stationnaire, les lignes de courant coïncident avec les trajectoires.

3 pts

3. Déterminer l'expression de la relation $y = f_A(x)$ pour la ligne de courant passant par le point $A(x=0, y=0)$ et la relation $y = f_B(x)$ pour celle passant par le point $B(x=0, y=12)$. On rappelle qu'en tout point d'un écoulement plan, une ligne de courant doit respecter $\frac{dx}{U_x} = \frac{dy}{U_y}$.
Tracer ces lignes de courants et commenter l'allure de l'écoulement.
L'écoulement étant stationnaire, les lignes de courant coïncident avec les trajectoires.

$$\frac{dx}{\dfrac{u_0}{2 + cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}} = \frac{dy}{-\dfrac{u_0}{L}\dfrac{2\pi y\, sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{\left(2 + cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right)^2}}$$

On sépare les variables et on intègre :

$$\int -\frac{2\pi}{L}\frac{sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{2 + cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}dx = \int \frac{dy}{\text{y}}$$

$$\int \text{dln}\left(2 + cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right) = \int dln(y)$$

$$\text{Soit } \ln\left(2+cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right) = ln(y) + E \text{ soit } ln\left(\frac{y}{2+cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}\right) = ln(F)$$

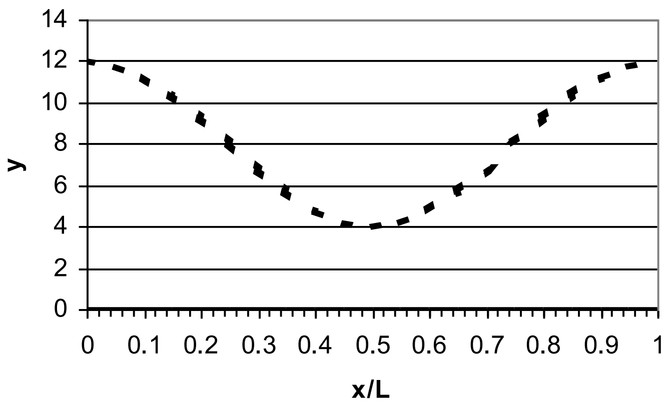
$$\text{Et donc } y = F\left(2+cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right)$$

Ainsi, en A, $0 = F\left(2+cos\left(\frac{2\pi 0}{L}\right)\right)$ ce qui implique que F vaut 0 et donc $f_A(x) = 0$.

en B, $12 = F\left(2+cos\left(\frac{2\pi 0}{L}\right)\right)$ ce qui implique que F vaut 4 et donc

$$f_B(x) = 4\left(2+cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right).$$

Trajectoires



L'écoulement subit un col et donc une accélération en son centre.

2 pts

4. Sachant que le fluide est à la pression atmosphérique au point *B(x=0, y=12)*, déterminer la pression au point *C(L/2, y=4)*. Vous pourrez utiliser le théorème de Bernoulli en rappelant ses hypothèses de validité. Réaliser l'application numérique.

   Bernoulli : fluide parfait, stationnaire, soumis au poids, incompressible, le long d'une ligne de courant.

   On applique l'équation de Bernoulli le long de la ligne de courant $f_B(x) = 4\left(2+cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right)$ qui passe par B et C.

$$P_B + \rho g y_B + \frac{\rho V_B^2}{2} = P_C + \rho g y_C + \frac{\rho V_C^2}{2}$$

$$P_C = P_0 + \rho g(y_B - y_C) + \frac{\rho V_B^2}{2} - \frac{\rho V_C^2}{2}$$

Or d'après le champ de vitesse :

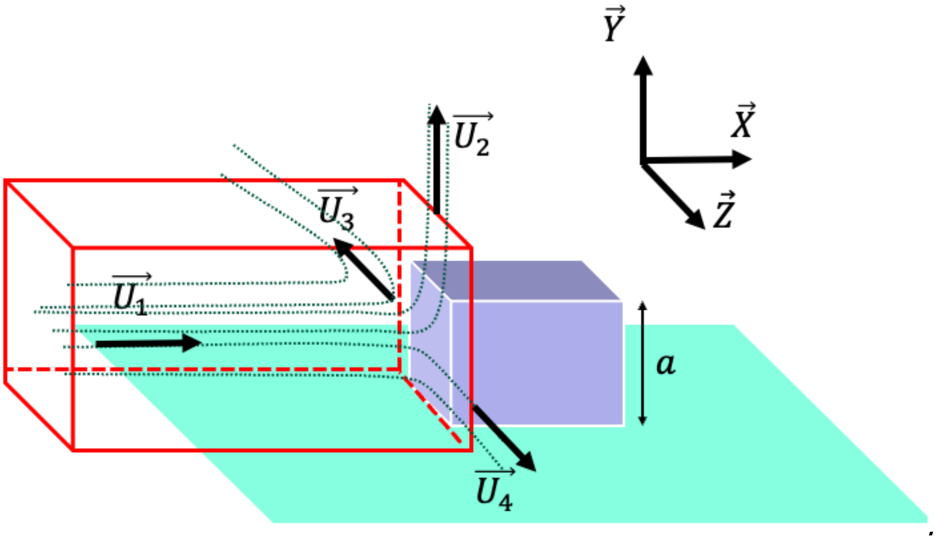
$$\overrightarrow{U_B} = \left| \begin{matrix} \frac{u_0}{3} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right. et\, \overrightarrow{U_C} = \left| \begin{matrix} \frac{u_0}{1} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$$

On a donc

$$P_C = P_0 + \rho g(12-4) + \frac{\rho}{2}\left(\frac{u_0^2}{9} - \frac{u_0^2}{1}\right)$$
$$P_C = P_0 + 8\rho g - \frac{8\rho}{18}u_0^2$$
$$P_C = 10^5 + 8\times 10^4 - \frac{8000}{18} = 1{,}79\ bar$$

Exercice 3. Problème de dynamique des fluides (6 points)

Un cube de masse m = 1 kg, de côté $a = 50$ cm *repose sur une table. Du fait des forces de frottement au sol, il reste immobile malgré son exposition à un vent d'ouest de vitesse* $\overrightarrow{U_1} = 100\,\vec{x}$ km/h. *L'air a pour masse volumique ρ=1.205 kg/m³. Le but de l'exercice est d'évaluer la poussée aérodynamique exercée par cet écoulement sur le cube. Pour ce faire, vous appliquerez le théorème d'Euler au système fluide contenu dans le domaine de contrôle rectangulaire placé en amont du cube (voir figure), contenant le fluide dévié par ce dernier.*



1 pt

1. Le jet d'air incident, comme les jets émergents du volume de contrôle, sont des jets libres parallèles soumis à la pression atmosphérique. F_a représente la norme de la force exercée par le cube sur l'écoulement d'air. Donner l'expression de la résultante des forces de surface $\sum \overrightarrow{F_S}$ (en Newton) s'appliquant sur la surface S du domaine de contrôle. Le résultat attendu est un vecteur dépendant de P_0, a et F_a.

$$\sum \overrightarrow{F_S} = -F_a\vec{x} + \iint_{S-Sa} -P_0\vec{n}ds = -F_a\vec{x} + \underbrace{\iint_S -P_0\vec{n}ds}_{\vec{0}} + \underbrace{\iint_s P_0\vec{n}ds}_{P_0a^2\vec{X}}$$
$$\sum \overrightarrow{F_S} = (P_0a^2 - F_a)\vec{X}$$

2. Exprimer, s'il y en a, les forces de volume $\sum \overrightarrow{F_v}$ (en newton) s'exerçant dans ce domaine fluide V_{ol}.

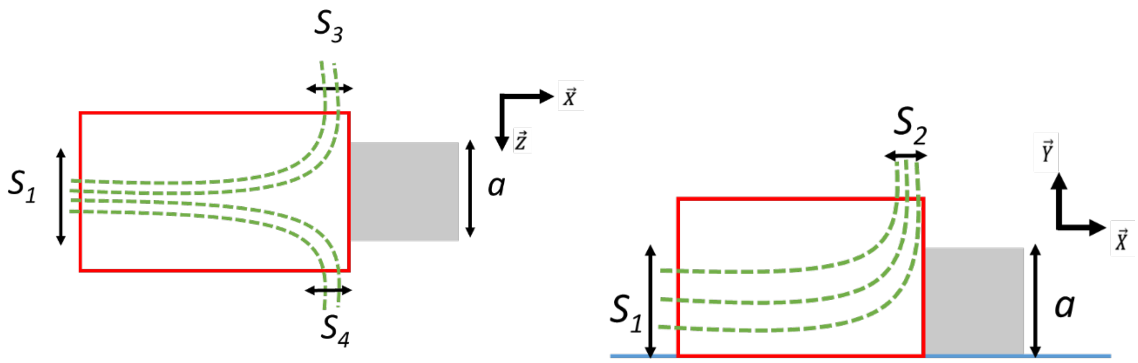
1 pt

$$\sum \overrightarrow{F_v} = \iiint -\rho g dV \vec{Y} = -\rho g V_{ol} \vec{Y}$$

Ce poids peut être considéré négligeable car la poussée d'Archimède a été négligée dans la question précédente.

3. On indique sur les schémas ci-dessous les surfaces d'entrée S_1 et de sortie, S_2, S_3, S_4 du jet dans le volume de contrôle. Calculer sur l'ensemble du contour du domaine fluide la quantité : $\iint_S \rho(\vec{U} \cdot \vec{n})\vec{U} ds$.

2 pts



$$\iint_S \rho(\vec{U} \cdot \vec{n})\vec{U} ds = -\rho U_1^2 S_1 \vec{X} - \rho U_3^2 S_3 \vec{Z} + \rho U_4^2 S_4 \vec{Z} + \rho U_2^2 S_2 \vec{Z}$$

4. Énoncer et appliquer le théorème d'Euler.

1 pt

$$\sum \overrightarrow{F_S} + \sum \overrightarrow{F_v} = \iint_S \rho(\vec{U} \cdot \vec{n})\vec{U} ds$$

$$(P_0 a^2 - F_a)\vec{X} - \rho g V_{ol} \vec{Y} = -\rho U_1^2 S_1 \vec{X} - \rho U_3^2 S_3 \vec{Z} + \rho U_4^2 S_4 \vec{Z} + \rho U_2^2 S_2 \vec{Y}$$

5. En projetant l'équation précédente sur l'axe $\vec{X}$ exprimer la force $\overrightarrow{F_f}$ exercée par le fluide sur le cube. Vous exprimerez votre résultat en fonction de la vitesse U_1, ρ, P_0 et a.

1 pt

$$\overrightarrow{F_f} = F_A \vec{x} = P_0 a^2 \vec{X} + \rho U_1^2 a^2 \vec{X}$$

Les questions suivantes sont en bonus !

6. Prenons maintenant pour système le cube. Faire le bilan des forces surfaciques et volumiques s'y appliquant. On rappelle que ce dernier est immobile par rapport au support.

+0.5 pt

$$\underbrace{-mg\vec{Y}}_{poids} + \underbrace{\vec{R}}_{\substack{réaction \\ du\ support}} + \underbrace{\overrightarrow{F_f} - P_0 a^2 \vec{X} - P_0 a^2 \vec{Y} + \cancel{P_0 a^2 \vec{Z}} - \cancel{P_0 a^2 \vec{Z}}}_{forces\ surfaciques} = \vec{0}$$

7. En déduire l'expression de la force de réaction du support $\vec{R}$.

+1 pt

$$\vec{R} = mg\vec{Y} - \underbrace{\overrightarrow{F_f}}_{P_0 s a^2 \vec{X} + \rho U_1^2 a^2 \vec{X}} + P_0 a^2 \vec{X} + P_0 a^2 \vec{Y}$$

$$\vec{R} = mg\vec{Y} \cancel{- P_0 a^2 \vec{X}} - \rho U_1^2 a^2 \vec{X} + \cancel{P_0 a^2 \vec{X}} + P_0 a^2 \vec{Y}$$

8. Donner l'expression analytique puis la valeur de la norme de la composante tangentielle de cette force de réaction qui s'oppose à la poussée aérodynamique induite par l'écoulement sur le cube.

+1

Vous vérifierez l'homogénéité de votre résultat. Déterminer alors la masse correspondant au poids équivalent à cette composante tangentielle.

$$\left|\vec{R}\cdot\vec{X}\right| = \rho U_1^2 a^2$$

$$\left[\rho V_{\square}^2 a^2\right] = \left[\frac{m}{L^3}\left(\frac{L}{s}\right)^2 L^2\right] = kg.m.s^{-2}$$

Or, la force est homogène à une masse multipliée par une accélération (PFD), donc notre résultante est bien homogène à une force en Newton.

$$\rho U^2 a^2 = 1{,}205 \times \left(\frac{100}{3{,}6}\right)^2 \times 0{,}5^2 = 232\ N$$

Soit l'équivalent du poids engendré par une masse de 23 kg.