

Sauf avis contraire, on considèrera dans les exercices un risque de première espèce  $\alpha = 5\%$ .

**Exercice 1****GPA****3 points**

1. A la vue du tableau ci-dessous, la quantité de sommeil d'un étudiant en heure notée  $N$  affect-t-elle la moyenne de ses notes  $M$  ?

	$M < 12$	$12 \leq M < 14$	$14 \leq M$
$N < 7$	10	12	6
$7 \leq N < 8$	7	14	18
$8 \leq N$	9	12	25

**Exercice 2****Le cours****3 points**

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , un échantillon i.i.d. de loi parente  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . On note la moyenne de l'échantillon  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  et sa variance  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ . Soit

$$T = \sqrt{n-1} \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S_n}}.$$

1. Montrez que  $T$  suit une loi de Student à  $n - 1$  degrés de liberté

**Exercice 3****L'abbé, t'es-ce theu ?****4 points**

La société Kilébomonsite propose un site web dont l'objectif est de faire en sorte que les internautes restent le plus longtemps possible sur le site. Le service marketing de la société propose une nouvelle interface et affirme que, grâce à elle, les utilisateurs vont rester plus longtemps sur le site. Pour prendre sa décision, Kilébomonsite décide proposer aléatoirement à ses visiteurs l'une ou l'autre des interfaces. Au bout d'une journée d'expérimentation, sur les 25 visiteurs du site, les résultats ont été les suivants :

- l'application originale a reçu 14 visiteurs qui sont resté en moyenne 68,01 secondes sur le site, avec un écart-type de 4,43 secondes,
- 11 visiteurs ont eu droit à la nouvelle version proposée par le service marketing et son restés en moyenne 69,63 secondes sur le site, avec un écart-type de 4,39 secondes .

Les experts de l'entreprise estiment que, quelle que soit l'interface proposée, le temps passé par les internautes sur le site suit une loi normale.

1. A la vue de ces résultats, Kilébomonsite doit-elle adopter la nouvelle interface proposée par son service marketing ?

**Exercice 4****Dur et devis****4 points**

Vingt moteurs ont été testés à haute température. Les durées de vie en heures des moteurs dans ces conditions sont indiquées ci-dessous, dont la somme est 2023.

1 4 5 21 22 28 40 42 51 53 58 67 95 124 124 160 202 260 303 363

On suppose que la durée de vie suit une loi exponentielle de densité

$$f_\lambda(x) = \lambda \exp^{-\lambda x} \text{ pour } x \geq 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

1. Montrez que la moyenne  $\bar{X}$  d'un échantillon de loi parente exponentielle tend asymptotiquement vers une loi normale

$$\sqrt{n}\lambda \left( \bar{X} - \frac{1}{\lambda} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

2. A la vue des données ci-dessus, peut on croire le constructeur quand il affirme que la durée de vie moyenne d'un moteur est-elle supérieure à 100 heures ?

---

**Exercice 5****2 points**

Sur échantillon de 1000 individus, on observe que le taux moyen de personnes à soigner pour un problème de cholestérol élevé est de 7,5%. Donner un intervalle dans lequel on soit « sûr » à 95% de la proportion exacte de personnes ayant un problème de cholestérol élevé dans la population.

---

**Exercice 6****Hue pépé!****2 points**

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , un échantillon i.i.d. dont la densité de la loi parente, qui dépend d'un paramètre  $\theta > 0$ , est

$$f_{\theta}(x) = \exp^{\sqrt{\theta}K(x)+H(x)+G(\theta)},$$

où  $K$ ,  $H$  et  $G$  sont trois fonctions de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .

1. Donner la forme de la région critique d'un test uniformément plus puissant pour tester

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ contre } H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0.$$

---

**Exercice 7****Du côté de chez Swan****2 points**

Le tableau suivant rapporte montre les résultats d'un essai du pronétholol pour le traitement de l'angine de poitrine, le nombre de crises sur 4 semaines pour chaque traitement (données de Pritchard et al., 1963). Tous les patients ont reçu d'abord pendant 4 semaines un placebo puis, toujours pendant 4 semaines, le traitement au pronétholol.

Patient	Placebo	Pronétholol
1	71	29
2	323	348
3	8	1
4	14	7
5	23	16
6	34	25
7	79	65
8	60	41
9	2	0
10	3	0
11	17	15
12	7	2

1. Peut-on affirmer que le traitement au pronétholol fait diminuer le nombre de crises?
- 

**Tables de la loi normale :** Cette table nous donne les valeurs de  $t$  telle que  $P(X \leq t)$  lorsque  $X$  suit une loi normale centrée réduite

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952

**Tables de la loi de Student :** Cette table nous donne les valeurs de  $t$  telle que  $\mathbb{P}(T > t)$  lorsque  $T$  suit une loi de student à  $\nu$  degrés de liberté

$\nu$	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,313
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,782
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,499
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,296
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,143
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,024
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,929
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385

**Tables de la loi de Fisher :** Cette table nous donne les valeurs de  $t$  telle que  $\mathbb{P}(X > t)$  lorsque  $X$  suit une loi du loi de Fisher à  $\nu_1$  et  $\nu_2$  degrés de liberté pour un risque de premier espèce  $\alpha = 0.05$ .

$\nu_1$	Degrés de liberté du dénominateur $\nu_2$															
	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5	5.050	4.387	4.017	3.745	3.563	3.396	3.316	3.123	3.055	2.998	2.950	2.909	2.875	2.845	2.819	2.797
6	4.387	3.982	3.707	3.479	3.306	3.160	3.067	2.929	2.858	2.802	2.757	2.719	2.686	2.658	2.633	2.611
7	4.017	3.707	3.499	3.327	3.178	3.056	2.936	2.825	2.751	2.695	2.653	2.618	2.587	2.561	2.537	2.516
8	3.745	3.479	3.327	3.192	3.066	2.960	2.856	2.761	2.690	2.637	2.597	2.563	2.533	2.507	2.484	2.464
9	3.563	3.287	3.183	3.072	2.964	2.873	2.784	2.705	2.638	2.587	2.549	2.516	2.487	2.462	2.440	2.421
10	3.396	3.127	3.059	2.970	2.874	2.794	2.717	2.648	2.586	2.538	2.501	2.469	2.441	2.416	2.395	2.376
11	3.316	3.067	3.067	2.970	2.874	2.794	2.717	2.648	2.586	2.538	2.501	2.469	2.441	2.416	2.395	2.376
12	3.123	2.929	2.825	2.761	2.690	2.637	2.597	2.563	2.533	2.507	2.484	2.464	2.445	2.428	2.413	2.399
13	3.055	2.858	2.751	2.695	2.637	2.587	2.549	2.516	2.487	2.462	2.440	2.421	2.404	2.389	2.376	2.364
14	2.998	2.802	2.695	2.637	2.587	2.549	2.516	2.487	2.462	2.440	2.421	2.404	2.389	2.375	2.364	2.353
15	2.950	2.757	2.653	2.602	2.558	2.523	2.492	2.465	2.441	2.421	2.404	2.389	2.375	2.363	2.352	2.342
16	2.909	2.719	2.618	2.573	2.533	2.502	2.474	2.449	2.427	2.407	2.392	2.377	2.364	2.353	2.342	2.332
17	2.875	2.686	2.587	2.546	2.510	2.482	2.456	2.433	2.412	2.393	2.377	2.363	2.351	2.340	2.330	2.321
18	2.845	2.658	2.561	2.522	2.490	2.463	2.438	2.417	2.397	2.379	2.364	2.351	2.339	2.328	2.319	2.310
19	2.819	2.633	2.537	2.502	2.472	2.447	2.423	2.403	2.384	2.367	2.352	2.339	2.328	2.317	2.308	2.299
20	2.797	2.611	2.516	2.483	2.456	2.432	2.410	2.391	2.373	2.356	2.341	2.328	2.317	2.307	2.298	2.289

**Tables de la loi du chi 2 :** Cette table nous donne les valeurs de  $t$  telle que  $\mathbb{P}(X > t)$  lorsque  $X$  suit une loi du chi 2 à  $\nu$  degrés de liberté

$\nu$	0.3	0.2	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
1	1.0742	1.6424	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794	10.8276
2	2.4079	3.2189	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.5966	13.8155
3	3.6649	4.6416	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8382	16.2662
4	4.8784	5.9886	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8603	18.4668
5	6.0644	7.2893	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496	20.5150
6	7.2311	8.5581	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476	22.4577
7	8.3834	9.8032	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777	24.3219
8	9.5245	11.0301	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	21.9550	26.1245
9	10.6564	12.2421	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5894	27.8772
10	11.7807	13.4420	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093	25.1882	29.5883
11	12.8987	14.6314	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7568	31.2641
12	14.0111	15.8120	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995	32.9095
13	15.1187	16.9848	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882	29.8195	34.5282
14	16.2221	18.1508	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412	31.3193	36.1233
15	17.3217	19.3107	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013	37.6973
16	18.4179	20.4651	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672	39.2524
17	19.5110	21.6146	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185	40.7902
18	20.6014	22.7595	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1565	42.3124
19	21.6891	23.9004	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909	38.5823	43.8202
20	22.7745	25.0375	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968	45.3147
21	23.8578	26.1711	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322	41.4011	46.7970
22	24.9390	27.3015	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7957	48.2679
23	26.0184	28.4288	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384	44.1813	49.7282
24	27.0960	29.5533	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798	45.5585	51.1786
25	28.1719	30.6752	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9279	52.6197
26	29.2463	31.7946	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417	48.2899	54.0520
27	30.3193	32.9117	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629	49.6449	55.4760
28	31.3909	34.0266	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782	50.9934	56.8923
29	32.4612	35.1394	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879	52.3356	58.3012
30	33.5302	36.2502	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922	53.6720	59.7031
31	34.5981	37.3591	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914	55.0027	61.0983
32	35.6649	38.4663	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858	56.3281	62.4872
33	36.7307	39.5718	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755	57.6484	63.8701
34	37.7954	40.6756	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609	58.9639	65.2472
35	38.8591	41.7780	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421	60.2748	66.6188
36	39.9220	42.8788	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192	61.5812	67.9852
37	40.9839	43.9782	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925	62.8833	69.3465
38	42.0451	45.0763	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621	64.1814	70.7029
39	43.1053	46.1730	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281	65.4756	72.0547
40	44.1649	47.2685	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907	66.7660	73.4020

**Tables de la loi de Fisher :** Cette table nous donne les valeurs de  $t$  telle que  $\mathbb{P}(X > t)$  lorsque  $X$  suit une loi de Fisher à  $\nu_1$  et  $\nu_2$  degrés de liberté pour un risque de première espèce  $\alpha = 0.025$ .

$\nu_1$	Degrés de liberté du dénominateur $\nu_2$															
	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5	7.1464	6.3932	5.9057	5.5779	5.3177	5.1017	4.9183	4.7581	4.6151	4.4859	4.3671	4.2565	4.1529	4.0554	3.9630	3.8754
6	5.9874	5.4176	5.0433	4.7755	4.5701	4.4047	4.2662	4.1468	4.0409	3.9451	3.8570	3.7749	3.6981	3.6259	3.5581	3.4939
7	5.5914	5.0433	4.7351	4.5170	4.3495	4.2111	4.0942	3.9934	3.9043	3.8240	3.7505	3.6824	3.6188	3.5590	3.5025	3.4491
8	5.3177	4.7755	4.5170	4.3296	4.1804	4.0523	3.9434	3.8487	3.7648	3.6891	3.6202	3.5569	3.4982	3.4431	3.3914	3.3426
9	5.1174	4.5701	4.3495	4.1804	4.0431	3.9231	3.8183	3.7258	3.6440	3.5706	3.5040	3.4430	3.3865	3.3336	3.2837	3.2365
10	4.9654	4.4047	4.2111	4.0523	3.9231	3.8097	3.7098	3.6211	3.5424	3.4720	3.4082	3.3502	3.2967	3.2470	3.2006	3.1569
11	4.8460	4.2662	4.0942	3.9434	3.8183	3.7098	3.6135	3.5281	3.4519	3.3834	3.3212	3.2645	3.2121	3.1634	3.1179	3.0749
12	4.7510	4.1468	3.9934	3.8487	3.7258	3.6211	3.5281	3.4452	3.3707	3.3035	3.2422	3.1862	3.1346	3.0863	3.0409	2.9981
13	4.6710	4.0409	3.9043	3.7648	3.6440	3.5424	3.4519	3.3707	3.2975	3.2314	3.1711	3.1159	3.0648	3.0171	2.9722	2.9298
14	4.6025	3.9451	3.8240	3.6891	3.5706	3.4720	3.3834	3.3035	3.2314	3.1660	3.1068	3.0521	3.0018	2.9550	2.9111	2.8696
15	4.5431	3.8570	3.7505	3.6202	3.5040	3.4082	3.3212	3.2422	3.1711	3.1068	3.0480	2.9939	2.9439	2.8972	2.8536	2.8124
16	4.4914	3.7749	3.6824	3.5569	3.4430	3.3502	3.2645	3.1862	3.1159	3.0521	2.9939	2.9399	2.8900	2.8435	2.8000	2.7590
17	4.4460	3.6981	3.6188	3.4982	3.3865	3.2967	3.2121	3.1346	3.0648	3.0018	2.9439	2.8900	2.8404	2.7942	2.7509	2.7101
18	4.4059	3.6259	3.5590	3.4431	3.3336	3.2470	3.1634	3.0863	3.0171	2.9550	2.8972	2.8435	2.7942	2.7482	2.7053	2.6647
19	4.3704	3.5581	3.5025	3.3914	3.2837	3.2006	3.1179	3.0409	2.9722	2.9111	2.8536	2.8000	2.7509	2.7053	2.6622	2.6223
20	4.3389	3.4939	3.4491	3.3426	3.2365	3.1569	3.0749	2.9981	2.9298	2.8696	2.8124	2.7590	2.7101	2.6647	2.6223	2.5825

## Formulaire

- fréquences  $\hat{f}_i = \frac{n_i}{n}$  où  $n$  est le nombre total d'observations et  $n_i$  le nombre d'observant de la modalité  $i$
- moyenne :  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \hat{f}_i x_i$
- variance empirique :  $\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
- espérance d'une variable aléatoire discrète :  $\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \mathbb{P}(x_i)$ .
- espérance d'une variable aléatoire continue de densité  $f(x)$  :  $\mathbb{E}(X) = \int x f(x) dx$ .
- variance d'une variable aléatoire  $X$  :  $Var(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$ .
- quantile (ou fractiles) à l'ordre  $p$ ,  $\forall p \in [0, 1]$ ,  $\hat{\Phi}_p$  telle que  $\hat{\mathbb{P}}(X \leq \hat{\Phi}_p) = p$
- les quartiles :
  - $\hat{\Phi}_{\frac{1}{4}} = \hat{Q}_1$ , telle que  $\hat{F}(\hat{Q}_1) = \frac{1}{4}$ ,
  - $\hat{\Phi}_{\frac{1}{2}} = \hat{Q}_2 = \hat{M}$ , telle que  $\hat{F}(\hat{M}) = \frac{1}{2}$ ,
  - $\hat{\Phi}_{\frac{3}{4}} = \hat{Q}_3$ , telle que  $\hat{F}(\hat{Q}_2) = \frac{3}{4}$ .
- covariance :  $c_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$  et corrélation :  $\text{cor}(x, y) = \frac{c_{xy}}{\sqrt{\hat{\sigma}_x^2 \hat{\sigma}_y^2}}$
- probabilité conditionnelle :  $\mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}$
- espérance conditionnelle :  $\mathbb{E}[Y | X = a] = \sum_{i=1}^n y_i \mathbb{P}(Y = y_i | X = a)$
- La loi des grands nombres  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}(X)$

Estimateurs :

- Le risque :  $R_{\hat{\theta}}(\theta) = \mathbb{E}((\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \theta)^2)$ 
  - Le biais d'un estimateur :  $\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta$
  - La variance d'un estimateur :  $\mathbb{E}((\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta}))^2)$
- Soit  $X$  une variable aléatoire de distribution  $f_{\theta}(x)$  et  $(X_1, \dots, X_n)$  une famille de  $n$  variables aléatoires i.i.d. ayant pour loi parente la loi de  $X$ .
- Vraisemblance :

$$L(\theta, X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(X_i)$$

Log vraisemblance :

$$\ell(\theta, X_1, \dots, X_n) = \log L(\theta, X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \log f_{\theta}(X_i)$$

- L'information de Fisher :  $I_n(\theta) = Var\left(\frac{\partial \ell(\theta, X_1, \dots, X_n)}{\partial \theta}\right) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ell(\theta, X_1, \dots, X_n)}{\partial \theta^2}\right)$
- Pour  $\theta \in \mathbb{R}^p$ , L'information de Fisher est la matrice  $p \times p$

$$I_n(\theta) = \mathbb{E}(\nabla \ell(\theta, X_1, \dots, X_n) \nabla \ell(\theta, X_1, \dots, X_n)^{\top})$$

- Borne de Cramer Rao
  - pour un estimateur sans biais de  $\theta$

$$BCR(\theta) = \frac{1}{I_n(\theta)} \leq \text{Var}(\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n))$$

- Pour un estimateur sans biais d'une fonction de  $\theta$  :  $\mathbb{E}(\hat{u}(\theta)) = u(\theta)$

$$BCR(\theta) = \frac{u'(\theta)}{I_n(\theta)} \leq \text{Var}(\hat{u}(\theta(X_1, \dots, X_n)))$$

— pour un estimateur biaisé de biais  $B$

$$BCR(\theta) = \frac{1 + B'(\theta)}{I_n(\theta)} \leq \text{Var}(\widehat{\theta}(X_1, \dots, X_n))$$

— L'estimateur max de vraisemblance  $\widehat{\theta}_{MV}$  d'un paramètre  $\theta$  est :

— Asymptotiquement sans biais

$$\widehat{\theta}_{MV} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta^*$$

— Asymptotiquement efficace

$$\text{Var}(\widehat{\theta}_{MV}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} I_n^{-1}(\theta^*)$$

— Asymptotiquement normal

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_{MV} - \theta^*) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, I_1^{-1}(\theta^*))$$

note :  $I_n(\theta^*) = nI_1(\theta^*)$

Variables aléatoires et lois

— Soit  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$  une variable aléatoire normale centrée réduite.

— Soit  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  un échantillon de  $n$  réalisations i.i.d. de cette variable aléatoire.

— La loi du  $\chi^2$  : On appelle loi du  $\chi^2$  à  $n$  degrés de libertés la loi de la variable aléatoire  $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i^2$

— La loi de student : On appelle loi de student à  $n$  degrés de libertés la loi de la variable aléatoire  $T_n$

$$T_n = \frac{N}{\sqrt{\frac{X_n}{n}}} \quad \begin{array}{l} N \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ X_n \sim \chi_n^2 \end{array}$$

Tests

— Régions de décision :

Région d'acceptation : l'ensemble  $\overline{W}$  des réalisations  $(x_1, \dots, x_n)$  pour lesquelles on garde  $H_0$

Région critique : l'ensemble  $W$  des réalisations  $(x_1, \dots, x_n)$  pour lesquelles on rejette  $H_0$

— Mesures de performances des tests

— Risque de première espèce ou niveau de signification du test  $\alpha$  : probabilité de rejeter  $H_0$  alors que  $H_0$  est vraie

$$\alpha = \mathbb{P}(D = 1 | H_0) = \int_{(x_1, \dots, x_n) \in W} L(x_1, \dots, x_n, H_0) dx_1, \dots, dx_n$$

— Risque de seconde espèce  $\beta$  : probabilité de garder  $H_0$  alors que  $H_1$  est vraie

$$\beta = \mathbb{P}(D = 0 | H_1) = \int_{(x_1, \dots, x_n) \in \overline{W}} L(x_1, \dots, x_n, H_1) dx_1, \dots, dx_n$$

— puissance d'un test :  $1 - \beta$  la probabilité de rejeter hypothèses nulle avec raison

—  $p$ -valeur :

— Tests du rapport de vraisemblance

$$W = \left\{ x_1, \dots, x_n \mid \frac{L(x_1, \dots, x_n, H_1)}{L(x_1, \dots, x_n, H_0)} > k \right\}$$

— Le principe de Neyman–Pearson : pour un  $\alpha$  fixé, trouver la fonction de décision qui minimise  $\beta$  (ou qui maximise  $1 - \beta$  la puissance du test)

— Le théorème de Neyman–Pearson : pour un test paramétrique de deux hypothèses simples, le test du rapport de vraisemblance

$$W = \left\{ x_1, \dots, x_n \mid \frac{L(x_1, \dots, x_n, H_1)}{L(x_1, \dots, x_n, H_0)} > k \right\}$$

tel que  $k$  soit fixé de sorte que

$$\alpha = \int_{(x_1, \dots, x_n) \in W} L(x_1, \dots, x_n, H_0) dx_1, \dots, dx_n$$

est optimal au sens du principe de Neyman–Pearson (parmi tous les tests de risque  $\alpha$ , c'est celui de puissance maximale).