

Etude d'un cycle dans deux sens de parcours

On considère deux moles de gaz parfait diatomique de coefficient $\gamma=1,4$ dans une enceinte munie d'un piston. On a $T_A = 650$ K et $V_B = 4V_A$. On étudie le cycle de transformations suivant :

- A \rightarrow B évolution adiabatique réversible
- B \rightarrow C évolution lente isochore
- C \rightarrow A évolution lente isotherme

1) Tracer l'allure du cycle dans un diagramme ($P; V$).

2) Le cycle est parcouru **dans le sens trigonométrique ABCA**.

2a) Donner les expressions puis calculer les transferts thermiques reçus par le gaz au cours des trois transformations. En déduire l'expression puis la valeur du travail reçu par le gaz au cours du cycle.

2b) Combien de thermostats faut-il, au minimum, pour parcourir le cycle dans ce sens ? Justifier.

2c) Effectuer un bilan énergétique pour ces thermostats, c'est-à-dire donner les valeurs numériques des transferts thermiques et du travail reçus par le ou les thermostats sur le cycle.

2d) Décrire la fonction d'une machine utilisant ce cycle.

3) Le cycle est parcouru **dans le sens horaire ACBA**.

3a) Combien de thermostat faut-il à présent ? Justifier.

3b) Effectuer un bilan énergétique pour ces thermostats, c'est-à-dire donner les valeurs numériques des transferts thermiques et du travail reçus par le ou les thermostats sur le cycle.

3c) Décrire la fonction d'une machine utilisant ce cycle.

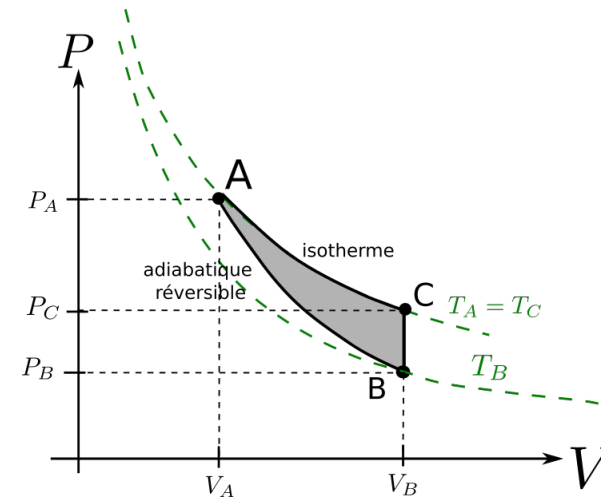
Suite de l'exercice

4) Effectuer un bilan d'entropie (c'est-à-dire calculer $\Delta S, S^{ech}$ et S^{cr}) pour le gaz pour chaque transformation dans les deux sens de parcours. Commenter vos résultats.

5) Effectuer un bilan d'entropie (c'est-à-dire calculer $\Delta S, S^{ech}$ et S^{cr}) pour chacun des thermostats dans les deux sens de parcours. Commenter vos résultats.

Correction :

1) voir schéma ci-après



2a) • Le transfert thermique reçu lors de la transformation **adiabatique** A \rightarrow B est nul.

• Lors de l'**isochore** B \rightarrow C, le travail est nul, le transfert thermique s'identifie à la variation d'énergie interne du gaz (premier principe de la thermodynamique) : $Q_{B \rightarrow C} = U_C - U_B$.

Or, d'après la première loi de Joule pour un gaz parfait, on a $U_C - U_B = C_V(T_C - T_B)$

La température au point C est égale à la température au point A puisque la transformation C \rightarrow A est isotherme.

La température en B en revanche est une inconnue, nous pouvons l'obtenir en appliquant la relation de Laplace entre les états A et B puisque la transformation A \rightarrow B est une adiabatique réversible.

Ainsi $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$ ce qui donne $T_B = T_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1}$

Application numérique : $T_B = 373$ K

Ainsi finalement, $Q_{B \rightarrow C} = \frac{nR}{\gamma - 1} T_A \left(1 - \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma - 1} \right)$

Application numérique : $Q_{B \rightarrow C} = \frac{2 \times 8,314}{1,4 - 1} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{0,4} \right)$

et finalement $Q_{B \rightarrow C} = 11,5 \text{ kJ}$

• La dernière étape du cycle est l'**isotherme** C → A. Or pour un gaz parfait, on a $\Delta U = C_V(T_A - T_C) = W_{C \rightarrow A} + Q_{C \rightarrow A} = 0$, ce qui donne donc $Q_{C \rightarrow A} = -W_{C \rightarrow A}$.

$W_{C \rightarrow A} = - \int_C^A P_{ext} dV = - \int_C^A P dV$ car la transformation C → A est réversible donc lente.

$W_{C \rightarrow A} = - \int_C^A \frac{nRT_A}{V} dV = -nRT_A \int_C^A \frac{1}{V} dV$ car la transformation est isotherme. par intégration, on obtient finalement :

$$W_{C \rightarrow A} = -nRT_A \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right)$$

Or $V_C = V_B$ et donc $Q_{C \rightarrow A} = nRT_A \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \right)$

Application numérique : $Q_{C \rightarrow A} = 2 \times 8,314 \times 650 \times \ln \left(\frac{1}{4} \right)$

et finalement $Q_{C \rightarrow A} = -15,0 \text{ kJ}$

Sur un cycle, la variation de l'énergie interne du gaz est nulle - car l'énergie interne est une **fonction d'état**. Ainsi le travail et le transfert thermique sont opposés sur le cycle : $\Delta U_{cycle} = 0 = W_{cycle} + Q_{cycle}$.

$$Q_{cycle} = Q_{A \rightarrow B} + Q_{B \rightarrow C} + Q_{C \rightarrow A} = -3,48 \text{ kJ}$$

Et donc $W_{cycle} = -Q_{cycle}$

$$W_{cycle} = -nRT_A \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \right) - \frac{nR}{\gamma - 1} T_A \left(1 - \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma - 1} \right)$$

Ainsi $W_{cycle} = +3,48 \text{ kJ}$

2b) Le point B est atteint par une détente adiabatique réversible qui ne nécessite pas de thermostat.

Le point C est issu d'un chauffage isochore : il faut pour cela placer le gaz au contact d'un **thermostat à la température finale de la transformation**, soit $T_C = T_A$.

Le point A est atteint par une compression isotherme : la température est maintenue par un thermostat qui peut être le même que précédemment.

Un seul thermostat de température T_A suffit à réaliser le cycle dans le sens trigonométrique.

2c) L'unique thermostat est utilisé pour tous les échanges thermiques.

Le transfert thermique reçu par le gaz au cours du cycle est égal au transfert thermique fourni par le thermostat, et donc à l'opposé du transfert thermique reçu par le thermostat.

$$Q_{\text{thermostat}}^{\text{reçu}} = +3,48 \text{ kJ}$$

On réalise le même calcul pour le travail reçu par le thermostat.

$$W_{\text{thermostat}}^{\text{reçu}} = -3,48 \text{ kJ}$$

2d) La machine consomme du travail et fournit un transfert thermique au seul thermostat mis en jeu.

Elle ne présente aucun intérêt dans la mesure où tous les phénomènes dissipatifs (frottements, effet Joule ...) réalisent une conversion de ce type. Autrement dit, fournir un transfert thermique à un thermostat dont la température ne varie pas est sans intérêt.

3a) En changeant le sens de parcours, nous trouvons dans l'ordre

- Une détente isotherme AC qui doit être réalisée au contact d'un premier thermostat de température T_A .

- Un refroidissement isochore CB qui nécessite un second thermostat à la température finale $T_B \neq T_A$

- Une compression adiabatique BA qui ne nécessite pas de thermostat.

Deux thermostats de températures T_A et T_B sont nécessaires au parcours du cycle dans le sens horaire.

3b) Le changement de sens de parcours inverse les signes des travaux et transferts thermiques échangés au cours du cycle.

On a $Q_{A \rightarrow C} = +15,0$ kJ, $Q_{C \rightarrow B} = -11,5$ kJ et $Q_{B \rightarrow A} = 0$

Ces transferts thermiques sont opposés à ceux que reçoivent les thermostats.

pour le thermostat A : $Q_{\text{thermostat A}}^{\text{reçu}} = -Q_{A \rightarrow C} = -15,0$ kJ

pour le thermostat B : $Q_{\text{thermostat B}}^{\text{reçu}} = -Q_{C \rightarrow B} = +11,5$ kJ

3c) Le thermostat le plus chaud cède de la chaleur au gaz, qui en restitue une quantité moindre au thermostat le plus froid.

La différence est convertie en travail par la machine, qui constitue un **moteur thermique**. La conception de ce moteur a nécessité deux thermostats.

SUITE DE L'EXERCICE

4) Etude dans le sens **trigonométrique**

• Transformation A \rightarrow B

$$\Delta S = S_B - S_A = C_V \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) + nR \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) = 0$$

$S^{\text{ech}} = 0$ car la transformation est adiabatique.

$S^{\text{cr}} = \Delta S - S^{\text{ech}}$ d'après le deuxième principe de la thermodynamique.

On obtient bien $S^{\text{cr}} = 0$ pour cette transformation **réversible**.

• Transformation B \rightarrow C

$$\Delta S = S_C - S_B = C_V \ln \left(\frac{T_C}{T_B} \right) + nR \ln \left(\frac{V_C}{V_B} \right) \quad \Delta S = 23,1 \text{ J.K}^{-1}$$

$$S^{\text{ech}} = \frac{Q_{B \rightarrow C}}{T_C} = \frac{11,5 \times 10^3}{650} \quad S^{\text{ech}} = 17,7 \text{ J.K}^{-1}$$

$S^{\text{cr}} = \Delta S - S^{\text{ech}} = 23,1 - 17,7$ $S^{\text{cr}} = 5,36 \text{ J.K}^{-1}$ d'après le deuxième principe de la thermodynamique.

On obtient $S^{\text{cr}} > 0$, cet échauffement isochore est **irréversible**.

• Transformation C \rightarrow A

$$\Delta S = S_A - S_C = C_V \ln \left(\frac{T_A}{T_C} \right) + nR \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right) = +nR \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right) \text{ et}$$

donc $\Delta S = -23,1 \text{ J.K}^{-1}$

$$S^{\text{ech}} = \frac{Q_{C \rightarrow A}}{T_A} = \frac{\Delta U - W_{C \rightarrow A}}{T_A}$$

Le calcul du travail pour cette compression isotherme donne :

$$W_{C \rightarrow A} = -nRT_A \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right)$$

$$\text{Ainsi : } S^{\text{ech}} = nR \ln \left(\frac{V_A}{V_C} \right) \quad S^{\text{ech}} = -23,1 \text{ J.K}^{-1}$$

$S^{\text{cr}} = \Delta S - S^{\text{ech}}$ d'après le deuxième principe de la thermodynamique.

On obtient bien $S^{\text{cr}} = 0$ Cette compression isotherme lente est **réversible**.

Etude dans le sens **horaire**

Les méthodes de calculs sont les mêmes, seuls les signes changent.

• Transformation B \rightarrow A

On a toujours $\Delta S = 0$, $S^{\text{ech}} = 0$ et $S^{\text{cr}} = 0$

• Transformation C \rightarrow B

$$\Delta S = S_B - S_C = C_V \ln \left(\frac{T_C}{T_B} \right) + nR \ln \left(\frac{V_C}{V_B} \right) \quad \Delta S = -23,1 \text{ J.K}^{-1}$$

$$S^{\text{ech}} = \frac{Q_{C \rightarrow B}}{T_B} = \frac{-11,5 \times 10^3}{373} \quad S^{\text{ech}} = -30,8 \text{ J.K}^{-1}$$

$$S^{\text{cr}} = \Delta S - S^{\text{ech}} = -23,1 - (-30,8) \quad S^{\text{cr}} = 7,76 \text{ J.K}^{-1}$$

• Transformation A \rightarrow C

$$\Delta S = +23,1 \text{ J.K}^{-1}, \quad S^{\text{ech}} = +23,1 \text{ J.K}^{-1}$$

On obtient toujours $S^{\text{cr}} = 0$

5) Etude dans le sens **trigonométrique**

Il y a un unique thermostat, l'entropie créée pour un thermostat est nulle (quelque soit la transformation).

$$\Delta S_{\text{thermostat}} = \frac{Q_{\text{thermostat}}^{\text{reçue}}}{T_A} \quad \Delta S_{\text{thermostat}} = 5,36 \text{ J.K}^{-1}$$

Cette variation d'entropie est positive. Sur un cycle, l'entropie du gaz ne varie pas, de sorte que la variation d'entropie de l'ensemble

{gaz+thermostat} est positive, résultat normal pour un système isolé.

La création d'entropie traduit le caractère **irréversible** du cycle : c'est le chauffage isochore, au cours duquel il y a déséquilibre thermique entre le système et le thermostat, qui est à l'origine de cette irréversibilité.

Etude dans le sens **horaire**

De façon analogue :

$$\text{Pour le thermostat A : } \Delta S_{\text{thermostat A}} = \frac{-Q_{A \rightarrow C}}{T_A} = \frac{-15,0 \times 10^3}{650}$$

$$\Delta S_{\text{thermostat A}} = -23,1 \text{ J.K}^{-1}$$

$$\text{Pour le thermostat B : } \Delta S_{\text{thermostat B}} = \frac{-Q_{C \rightarrow B}}{T_B} = \frac{+11,5 \times 10^3}{373}$$

$$\Delta S_{\text{thermostat B}} = +30,8 \text{ J.K}^{-1}$$

Là encore, l'entropie de l'ensemble {gaz+thermostat A+thermostat B} a augmenté, l'étape irréversible est le refroidissement C → B.