INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES ROUEN NORMANDIE	***Devoir Surveillé de Transfert Thermique***	***EC P8-1*** J. Yon 4/4/24 durée : 1h30

Les calculatrices sont autorisées. Aucun document n'est autorisé.

Merci d'éteindre et de ranger les téléphones portables ainsi que les montres connectées.

Pertes thermiques au sein de vos canalisations d'eau chaude

Nous allons modéliser les pertes thermiques produites par un tube en cuivre de circulation d'eau chaude domestique de longueur L. Le tube possède un rayon intérieur noté $r_{int}=12\ mm$ et extérieur noté $r_{ext}=13\ mm$, sa conductivité thermique est notée $k_{tr}=380\ W/m/K$. L'eau chaude circule à la température $T_c=70°C$ à l'intérieur du tube et cède par convection une partie de son énergie thermique au tube en cuivre. Pour cet échange, on considérera le coefficient de convection $h_c = 50\, W/m^2/K$. Le tube n'étant pas isolé, on considérera qu'il échange également par convection (coefficient $h_\infty = 10\, W/m^2/K$) avec l'air ambiant de la pièce dont la température est notée $T_\infty=17°C$.

Les quatre parties peuvent être traitées de façon indépendante.

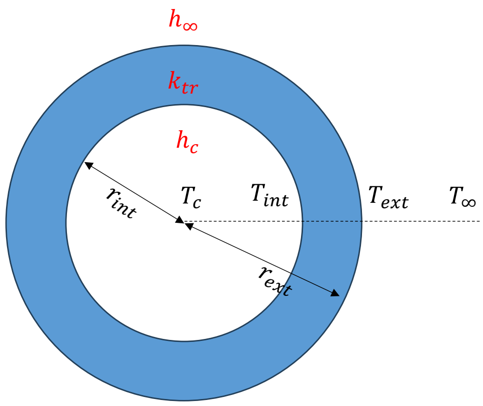


Figure 1 : Illustration du problème.

Partie 1 : Équation de la chaleur en cylindrique (7 points)

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à retrouver l'expression de l'équation de la chaleur dans le tube en cuivre. On considérera pour cela que la seule variable d'intérêt est le rayon (problème 1D). Pour se faire, nous allons faire un bilan thermique au sein d'une tranche cylindrique infinitésimale bornée par les rayons r et $r+dr$ (définissant ainsi le système d'étude). On considèrera que le cuivre n'est le siège d'aucune source thermique et qu'un état stationnaire est atteint.

1 pt

1. Donner l'expression intégrale (question de cours) du flux conductif $\Phi(r+dr)$ s'échappant du système en $r+dr$ en faisant apparaitre la densité de flux de conduction $\overrightarrow{\varphi_{cond}}$:

1 pt

$$\Phi(r+dr) = \iint_{r+dr} \overrightarrow{\varphi_{cond}} \cdot \vec{n} ds$$

2. Rappeler l'expression générale de la densité de flux de conduction (question de cours).

$$\overrightarrow{\varphi_{cond}} = -k_{tr}\overrightarrow{grad}(T)$$

1 pt

3. On rappelle qu'en coordonnées cylindriques, le gradient s'écrit $\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{U_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{U_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{U_z}$. Que devient la densité de flux de conduction avec les hypothèses de la présenté étude ?

$$\overrightarrow{\varphi_{cond}} = -k_{tr}\frac{dT}{dr}\overrightarrow{U_r}$$

1 pt

4. En déduire l'expression de $\Phi(r+dr)$. Attention à bien spécifier à quel rayon la dérivée $\frac{dT}{dr}$ doit être évaluée.

$$\Phi(r+dr) = \iint_{r+dr} -k_{tr}\frac{dT}{dr}\overrightarrow{U_r} \cdot \overrightarrow{U_r} ds = -k_{tr}\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r+dr} 2\pi(r+dr)L$$

1 pt

5. Reprendre la question précédente pour évaluer, cette fois-ci, le flux pénétrant dans le domaine en r. Là encore, vous veillerez à bien spécifier à quel rayon la dérivée $\frac{dT}{dr}$ doit être évaluée.

$$\Phi(r) = \iint_{r} -k_{tr}\frac{dT}{dr}\overrightarrow{U_r} \cdot (-\overrightarrow{U_r}) ds = k_{tr}\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r} 2\pi r L$$

1 pt

6. En faisant le bilan thermique sur cette tranche et en ayant recours aux résultats obtenus aux questions 4 et 5, montrer que l'on aboutit à une relation de la forme $f(r+dr) - f(r) = 0$ où f est une fonction qui ne dépend que de r et de la dérivée de T par rapport à r (évaluée en r).

$$\underbrace{Prod}_{0} = Ech + \underbrace{Stck}_{0}$$

Donc, $\Phi(r+dr) + \Phi(r) = 0$, ce qui mène à $k_{tr}\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r} 2\pi r L - k_{tr}\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r+dr} 2\pi(r+dr)L = 0$

$$\underbrace{\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r+dr}(r+dr)}_{f(r+dr)} - \underbrace{\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r} r}_{f(r)} = 0$$

1 pt

7. Par définition de la dérivée : $f(r+dr) = f(r) + \frac{df}{dr}dr$. Montrer que le bilan thermique précédent mène à l'équation différentielle suivante : $\frac{dT}{dr} + r\frac{d^2T}{dr^2} = 0$ (équation de la chaleur dans un barreau axisymétrique passif à l'état stationnaire).

A la question précédente, on a montré que $f(r+dr) - f(r) = 0$, on a donc $\frac{df}{dr} = 0$, ce qui conduit à $\frac{d\left(r\frac{dT}{dr}\right)}{dr} = 0$ ce qui peut encore s'écrire $\frac{dT}{dr} + r\frac{d^2T}{dr^2} = 0$.

Partie 2 : Résistance équivalente de conduction en cylindrique (5 points)

Nous allons maintenant déterminer le profil de température dans le cuivre et en déduire une résistance thermique.

1 pt

8. Montrer que la solution générale de cette équation différentielle est de la forme $T(r) = Aln(r) + B$.

$\frac{d\left(r\frac{dT}{dr}\right)}{dr} = 0$ donc $r\frac{dT}{dr} = A$ et donc $\frac{dT}{dr} = \frac{A}{r}$ et donc $dT = A\frac{dr}{r}$ et donc $T(r) = Aln(r) + B$

2 pts

9. Exprimer les constantes A et B en fonction des températures du tuyau de cuivre T_{int} et T_{ext} respectivement aux rayons r_{int} et r_{ext}. Vous donnerez ainsi une expression générale du profile de température en fonction de r_{int}, r_{ext}, T_{int} et T_{ext}.

$$T(r_{int}) = A\ln(r_{int}) + B = T_{int}$$
$$T(r_{ext}) = A\ln(r_{ext}) + B = T_{ext}$$

Par soustraction on arrive à $A=\frac{T_{int}-T_{ext}}{\ln\left(\frac{r_{int}}{r_{ext}}\right)}$ et par suite : $B = T_{int} - \frac{T_{int}-T_{ext}}{\ln\left(\frac{r_{int}}{r_{ext}}\right)} \ln(r_{int})$

Finalement, on aboutit à $T(r) = T_{int} + \frac{T_{int}-T_{ext}}{\ln\left(\frac{r_{int}}{r_{ext}}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_{int}}\right)$

2 pts

10. Donner l'expression du flux thermique $\Phi(r)$ traversant le tube en cuivre (en n'importe quel r) en fonction de T_{int}, T_{ext}, r_{int}, r_{ext}, k_{tr} et L. En déduire l'expression de sa résistance thermique.

$$\Phi(r) = -k_{tr}\frac{dT}{dr}2\pi rL = -k_{tr}\frac{A}{r}2\pi rL = -k_{tr}A2\pi L = -k_{tr}\frac{T_{int}-T_{ext}}{\ln\left(\frac{r_{int}}{r_{ext}}\right)}2\pi L$$
$$= \frac{T_{int}-T_{ext}}{\frac{\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{int}}\right)}{2\pi L k_{tr}}}$$

La résistance thermique de conduction est donc $R_{cond} = \frac{\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{int}}\right)}{2\pi L k_{tr}}$

Partie 3 : Résistances équivalente de convection en cylindrique (2 points)

1 pt

11. Exprimer les flux convectifs transmis par l'eau au tube puis par le tube à l'air en fonction de T_c, T_∞, T_{int}, T_{ext}, r_{int}, r_{ext}, h_c, h_∞ et L

$$\Phi(r_{int}) = h_c(T_c - T_{int})2\pi r_{int}L$$
$$\Phi(r_{ext}) = h_\infty(T_{ext} - T_\infty)2\pi r_{ext}L$$

1 pt

12. En déduire l'expression des résistances convectives en coordonnées cylindriques. Est-ce différent de leur expression en coordonnées cartésiennes ?

$$R_{conv} = \frac{1}{h2\pi rL} = \frac{1}{hS}$$

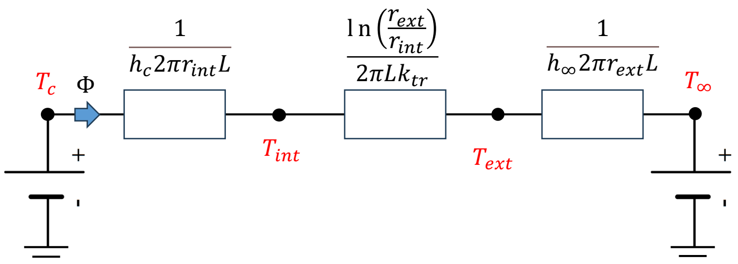
Même expression qu'en coordonnées cartésiennes.

Partie 4 : Calcul de déperditions thermiques par le tube en cuivre (6 points)

Si vous n'êtes pas parvenu à trouver l'expression de la résistance de conduction thermique en cylindriques (parties 1 et 2), vous utiliserez l'expression valable en coordonnées cartésiennes en discutant de la validité de cette approche.

2 pts

13. Faire le schéma électrique équivalant en reportant les résistances, les températures et le flux.



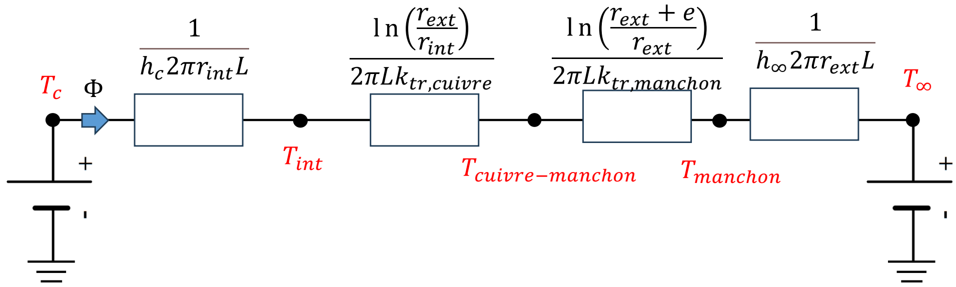
2 pts

14. En déduire l'expression analytique puis l'évaluation numérique de la déperdition thermique se produisant pour chaque mètre de tube.

$$\frac{\Phi}{L} = \frac{T_c - T_\infty}{\frac{1}{h_c 2\pi r_{int}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{int}}\right)}{2\pi k_{tr}} + \frac{1}{h_\infty 2\pi r_\infty}} = \frac{70-17}{0{,}265 + 3{,}35\times10^{-5} + 1{,}22} = 35{,}6\ W/m$$

15. Refaire le schéma électrique et le calcul de la déperdition thermique si on ajoute un manchon en mousse de caoutchouc d'épaisseur *e=13 mm* autour du tuyau de cuivre. La conductivité thermique de cet isolant est de *0,04 W/m/K*. Commenter votre résultat.

2 pts



$$\frac{\Phi}{L} = \frac{T_c - T_\infty}{\frac{1}{h_c 2\pi r_{int}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{ext}}{r_{int}}\right)}{2\pi k_{tr,cuivre}} + \frac{\ln\left(\frac{r_{ext}+e}{r_{ext}}\right)}{2\pi k_{tr,manchon}} + \frac{1}{h_\infty 2\pi (r_{ext}+e)}} = \frac{70-17}{0{,}265 + 3{,}35\times10^{-5} + 2{,}76 + 0{,}612} = 14{,}6\ W/m$$

On a divisé la déperdition par un facteur 2,44.

L'étudiant n'ayant pas réussi à obtenir la bonne expression de la résistance de conduction en cylindrique utilisera l'expression $R_{cond} = \frac{e}{S k_{tr}}$. Il devra étudier la validité de cette hypothèse :
Si l'épaisseur du tuyau est faible devant le rayon, le problème tend vers un problème cartésien (la courbure devient négligeable). Cela revient à considérer que $r_{ext} = r_{int} + \Delta r$ avec $\Delta r \ll r_{int}$. Ainsi $R_{cond} = \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta r}{r_{int}}\right)}{2\pi L k_{tr}} \rightarrow \frac{\frac{\Delta r}{r_{int}}}{2\pi L k_{tr}} = \frac{\Delta r}{2\pi r_{int} L k_{tr}} = \frac{\Delta r}{S k_{tr}}$, on retrouve bien l'expression obtenue en cartésien.
Il obtiendra alors les résultats suivants :

$\frac{\Phi}{L} = 35.6\ W/m$ sans isolant (soit un résultat identique au calcul avec résistance en cylindrique) et $\frac{\Phi}{L} = 10{,}9\ W/m$ avec manchon, soit un gain évalué à un facteur 3,26 (surévalué donc). L'approximation cartésienne est valable pour le cuivre ici mais pas pour le manchon.