INSA de Rouen
STPI2 / Semestre 4 / filière physique

Travaux dirigés de l'EC P8-2 Initiation à la mécanique des fluides

Jérôme Yon (jerome.yon@insa-rouen.fr)
Diane Duval (diane.duval@insa-rouen.fr)
Samuel Paillat (samuel.paillat@insa-rouen.fr)
Jérôme Thibaut (jerome.thibaut@insa-rouen.fr)
Antoine Vaugeois (antoine.vaugeois@insa-rouen.fr)
2025

TD N°8

Exercice 1 : **Fosse océanique.**

1. Calculer la pression au fond d'une fosse océanique de ***4000 m*** de profondeur, sachant que la densité de l'eau est de ***1.03***.
2. A quelle profondeur la pression est-elle de ***2 bars*** ?

Exercice 2 : **Mesures manométriques**.

Considérons tout d'abord un manomètre simple (tube en *U*) rempli d'un liquide de masse volumique ρ.

1. Déterminer la différence Δh entre les niveaux des deux interfaces de séparation eau-air de chaque côté du tube en *U* lorsqu'une surpression ΔP est imposée sur l'un des côtés.
2. Définir un paramètre permettant d'évaluer la sensibilité de ce dispositif manométrique. Faire l'application numérique.

On considère maintenant un dispositif formé de deux récipients cylindriques de sections droites respectives S_1 et S_2 reliées par un tube en *U* de section intérieure S constante. L'ensemble contient deux liquides incompressibles non miscibles entre eux : l'eau, de masse volumique ρ_0, et l'aniline de masse volumique ρ. Initialement, la pression P_0 au-dessus des deux liquides est la même. On provoque au-dessus de l'eau du récipient de gauche une surpression ΔP.

3. Déterminer le déplacement Δh de la surface de séparation entre l'eau et l'aniline dans le tube.
4. Evaluer la sensibilité $\Delta h/\Delta P$ du manomètre. Commenter ce résultat, comparer à la question 2.

$\rho_0=0.998\ g.cm^{-3}$, $\rho=1.024\ g.cm^{-3}$, $g=9.81\ m.s^{-2}$, $S_1=S_2=100\ S$.

TD N°9

Exercice 3 : **Un modèle d'atmosphère.**

L'atmosphère terrestre est assimilée à un gaz parfait de masse molaire M dont la température T varie en fonction de l'altitude z suivant la loi :

$$T = \frac{T_0\, z_0}{z + z_0}$$

Déterminer analytiquement puis numériquement la pression en fonction de z.

$T_0=300\ K$, $M=29\ g.mol^{-1}$, $g=9.8\ m.s^{-2}$ ***(uniforme)***, ***R=8.31 SI, au sol :*** $P_0=10^5\ Pa$ ***et le gradient de température a pour valeur*** $-6.5\ K.km^{-1}$.

Exercice 4 : **Vase en rotation.**

Un vase cylindrique de section circulaire, de rayon $\boldsymbol{R}$ contient de l'eau de masse volumique $\boldsymbol{\rho}$ sur la hauteur $\boldsymbol{h}$. On met le vase en rotation autour de son axe à la vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega}$ (référentiel du laboratoire considéré galiléen). On supposera que le fond du vase ne se découvre pas.

Rappel de mécanique : On considère un référentiel $\mathfrak{R}$ en rotation uniforme autour d'un axe fixe Oz de vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z$ en coordonnées cylindriques d'axe Oz et de vecteurs de base $\overrightarrow{(u_r}, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

Un point matériel M de masse m en mouvement dans ce référentiel $\mathfrak{R}$ subit une force d'inertie d'entrainement qui s'écrit : $\vec{F}_{ie} = m\Omega^2 r\vec{u}_r$, où r est la distance du point M à l'axe Oz

1. Déterminer l'équation de la surface libre de l'eau en fonction des données du problème et d'une constante k.
2. Déterminer la constante k en écrivant la conservation d'une quantité bien choisie.
3. Déterminer alors l'abaissement de hauteur $\boldsymbol{\Delta h}$ du milieu de la surface libre par rapport à sa position lorsque le liquide est au repos.
4. Comparer $\boldsymbol{\Delta h}$ au relèvement $\boldsymbol{\Delta h'}$ sur les parois du vase.
5. Une application possible d'un tel dispositif consiste à déterminer la vitesse angulaire de rotation du vase. Exprimer cette vitesse angulaire en fonction de $\boldsymbol{\Delta h}$.
6. Calculer le nombre de tours par minute N du vase avec :

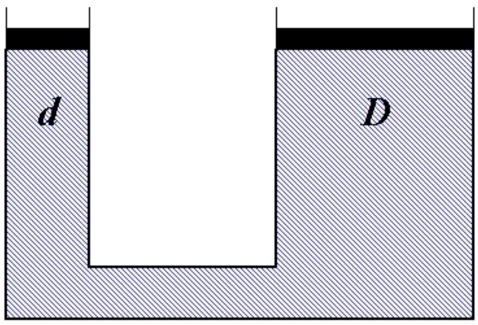
   R=10 cm, Δh=2 cm, g=9.81 m.s^{-2}.
7. Quelle doit-être la vitesse maximale de rotation du vase, $\boldsymbol{h}$ étant donné, pour que le fond ne se découvre pas ?

   h=20 cm.

TD N°10

Exercice 5 : **Le vérin hydraulique.**

Considérons un vérin hydraulique constitué de 2 cylindres verticaux remplis d'eau et qui communiquent à leur partie inférieure par un tube de faible dimension. Le piston d'entrée de diamètre ***d=4 cm*** et le piston de sortie de diamètre ***D=40 cm*** ont une masse négligeable.



1. On exerce une force ***f =100 N*** vers le bas sur le piston d'entrée. Calculer la force ***F*** qu'il faut exercer sur l'autre piston pour maintenir l'ensemble en équilibre.
2. On enfonce le piston d'entrée de ***10 cm***. Calculer de combien s'élève le piston de sortie.
3. On pose une masse de ***1 kg*** sur le piston d'entrée, trouver la position d'équilibre.

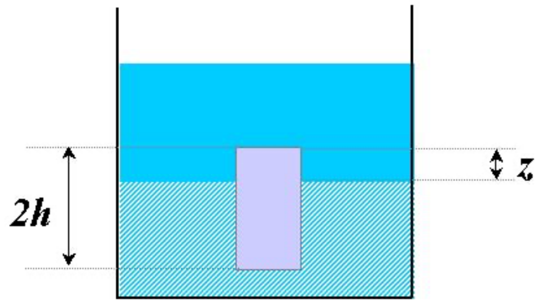
Exercice 6 : **Résultante des forces de pression sur un récipient.**

Un bol a la forme d'une demi-sphère et est rempli d'un liquide de masse volumique ρ. Calculer la résultante des forces de pression s'exerçant sur le bol. Le résultat n'est-il pas évident ?

TD N°11

Exercice 7 : **Corps immergé dans deux fluides différents.**

Un solide assimilable à un cylindre de section S et de hauteur $2h$, de masse volumique ρ est immergé dans un récipient contenant deux liquides non miscibles de masses volumiques ρ_1 et ρ_2. Le récipient est supposé de grandes dimensions, de sorte que les niveaux sont indépendants de la position du solide. Par un guidage approprié, supposé sans frottements, le cylindre reste dans la position verticale. On repère sa position par z.



1. Ecrire l'équation permettant de déterminer la position d'équilibre du solide.
2. Discuter l'existence de cette position d'équilibre et étudier sa stabilité.

Exercice 8 : **Dérivée particulaire et équation de continuité.**

Les composantes de la vitesse d'un écoulement stationnaire sont données par :

$$\vec{U}\left|\begin{array}{c} 2x^2y \\ -2xy^2 \\ 0 \end{array}\right.$$

1. L'écoulement est-il stationnaire ?
2. Déterminer la ligne de courant passant par le point $x=y=1,\ z=0$.
3. Peut-on en déduire les coordonnées paramétriques $x(t), y(t), z(t)$ pour une particule située en $x=y=1,\ z=0$ à l'instant $t=0$?
4. Déterminer la composante a_x de l'accélération de cette particule en dérivant deux fois $x(t)$.
5. Calculer la composante suivant x du champ eulérien des accélérations particulaires.
6. Peut-on retrouver le résultat de la question 4 à partir de celui de la question 5 ?
7. Vérifier que le fluide est incompressible.

TD N°12

Exercice 9 : **Cinématique d'un écoulement compressible.**

Le champ de vitesse d'un écoulement est :

$$\vec{U} = \left|\begin{array}{c} \dfrac{x}{t_0+t} \\ 0 \\ 0 \end{array}\right.$$

Le champ de masse volumique du fluide a pour expression $\rho = \frac{\rho_0 t_0}{t_0+t}$ avec $\boldsymbol{\rho_0}$ et $\boldsymbol{t_0}$ des constantes.

1. Vérifier l'équation de continuité
2. Calculer la masse totale à l'intérieur d'un volume de contrôle cylindrique de section ***S*** et limité par les plans $\boldsymbol{x=x_0}$ et $\boldsymbol{x=3x_0}$ ainsi que sa dérivée par rapport au temps.
3. Déterminer le flux de masse ou débit massique traversant le volume de contrôle.
4. Calculer l'accélération
5. En déduire une description de l'écoulement.

Exercice 10 : **Alimentation d'une tuyère.**

L'entrée ***E*** d'un tuyau se trouve à ***10 m*** sous la surface libre d'un réservoir d'eau ***R*** de grandes dimensions et la sortie à ***30 m*** au-dessous de cette même surface libre. Le diamètre du tuyau est de ***D=8 cm***. Il se termine par une courte tuyère ***T*** de diamètre ***d=4 cm***.

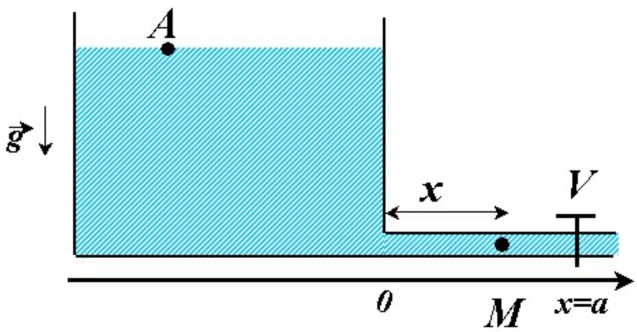
1. Faire un schéma et adopter un repère d'espace.
2. Quelle est la valeur de la vitesse $\boldsymbol{V_T}$ à la sortie de la tuyère ?
3. Quel est le débit massique d'eau qui s'écoule ?
4. Quelle est, dans le tuyau, la valeur des pressions dynamique et statique en ***E*** ?

TD N°13

Exercice 11 : **Equation de Bernoulli en écoulement instationnaire.**

Un grand réservoir est rempli d'un liquide incompressible, de masse volumique $\boldsymbol{\rho}$. A la hauteur ***h*** au-dessous de la surface libre, un tuyau d'évacuation horizontal, de faible section et de longueur ***a*** est fermé par une vanne ***V***. On ouvre brusquement ***V*** à l'instant ***t=0***. A un instant ultérieur, on admet que le niveau du réservoir ne varie pratiquement pas et que la vitesse du fluide est négligeable dans tout le volume de celui-ci et que, a priori, le long de la conduite ($\boldsymbol{0<x<a}$) $\vec{U} = U(x,t)\vec{x}$.

1. Etablir que la vitesse du fluide dans la conduite ne dépend que de ***t***.
2. Donner la valeur $\boldsymbol{v_0}$ de la vitesse débitante pour un temps suffisamment long devant le temps d'établissement de l'écoulement stationnaire et suffisamment court devant la durée de vidange.



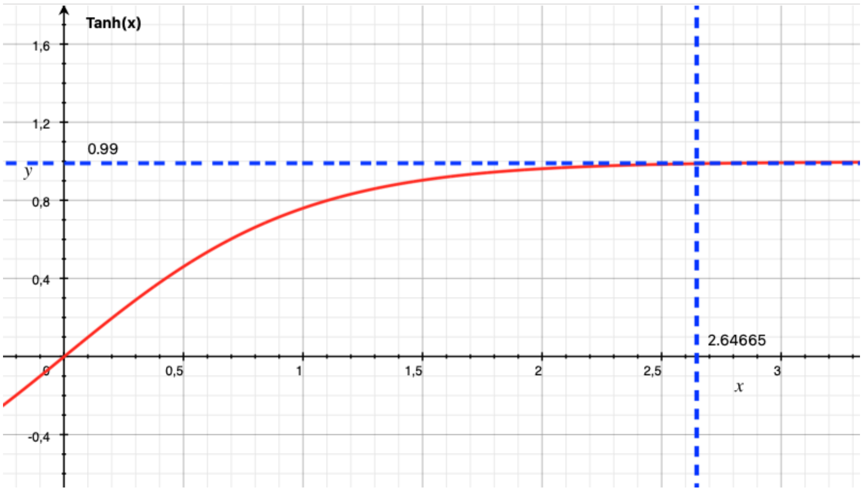
3. Étudions maintenant l'établissement de ce régime stationnaire. En utilisant l'expression instationnaire du théorème de Bernoulli :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\cdot \vec{dl} + d\left(\frac{U^2}{2} + gz\right) + \frac{dP}{\rho} = 0,$$

montrer que, à ***t*** donné, la pression ***P*** dans la conduite est une fonction affine de ***x***.

4. Etablir l'équation différentielle décrivant l'évolution de ***v(t)***.

On note $th(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ la fonction tangente hyperbolique dont on donne la représentation graphique ci- dessous :



On peut montrer que la solution de l'équation différentielle vérifiée par la vitesse s'écrit :

$$\boldsymbol{U(t) = v_0\, th\left(\frac{t}{\tau}\right)}$$

avec $\tau=2a/(2gh)^{1/2}$.

5. Quelle est la signification physique du paramètre τ ? Calculer sa valeur.

$h=1.6$ m, $a=0.5$ m, $g=9.81$ m.s^{-2}

6. Calculer la durée T à partir de l'ouverture du robinet permettant à la vitesse débitante d'atteindre ***99%*** de la vitesse du régime permanent. Dans quelles conditions ce résultat permet-il de supposer la stationnarité d'un écoulement de vidange d'un réservoir ?

Exercice 12 : **Durée de vidange d'un réservoir.**

Le réservoir de la figure ci-dessous a une surface libre d'aire $S=1$ m² ; il est initialement rempli d'une hauteur $h_0=1.6$ m de liquide. A l'instant $t=0$, on ouvre au fond du réservoir un orifice de section $s=2$ cm². On prendra $g=10$ m.s^{-2}.

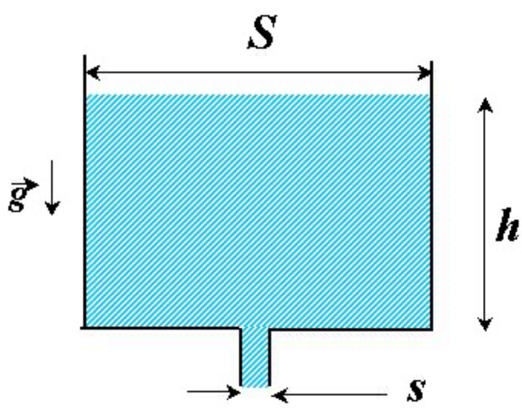
On pourra considérer l'écoulement stationnaire.

1. Quelle est la vitesse débitante initiale v_0 prévue par le théorème de Torricelli ?

2. Ce théorème considère que la vitesse du fluide en haut du réservoir est nulle. Quelle vitesse débitante initiale v_0' obtient-on en tenant compte du mouvement de la surface libre ? La correction apportée est-elle indispensable ou négligeable ?

3. Quel est le débit de volume initial q_{v0}? Quelle serait la durée t de vidange si celle-ci se faisait à débit constant ?

4. En assimilant qu'à chaque instant t de la vidange l'écoulement peut être considéré permanent (validité de l'hypothèse de quasi-stationnarité vue dans l'exercice précédent), établir une équation différentielle décrivant l'évolution de $h(t)$. La résoudre et en déduire la valeur de la durée T de la vidange.



Exercice 13 : **Action d'un jet sur une paroi.**

Un jet d'eau, en forme de lame horizontale de section ***s***, de vitesse ***V***, frappe une plaque carrée homogène de côté ***a*** mobile autour d'un axe horizontal passant par un de ses côtés. Celle-ci s'incline d'un angle α sur la verticale.

Calculer α en fonction de la distance verticale ***h*** du jet à l'axe et de la masse ***M*** de la plaque. On négligera l'influence des frottements sur l'écoulement et on prendra :

$s = 10\ cm^2$; $V = 30\ m/s$; $h = 0.6\ m$; $a = 0.9\ m$, $M = 240\ kg$, $g = 10\ m/s^2$.