

# *P8 – 2ème Partie*

## *Initiation à la mécanique des fluides*

### *Plan du cours :*

**Chapitre 1 : Généralités**

**Chapitre 2 : La statique des fluides**

**Chapitre 3 : La cinématique des fluides**

**Chapitre 4 : La dynamique des fluides**

### *Accès internet :*

<http://moodle.insa-rouen.fr/>

*Jérôme Yon*  
*(jerome.yon@insa-rouen.fr)*  
2024

*P8 – 2ème Partie*

# Chapitre 1 :

# Généralités

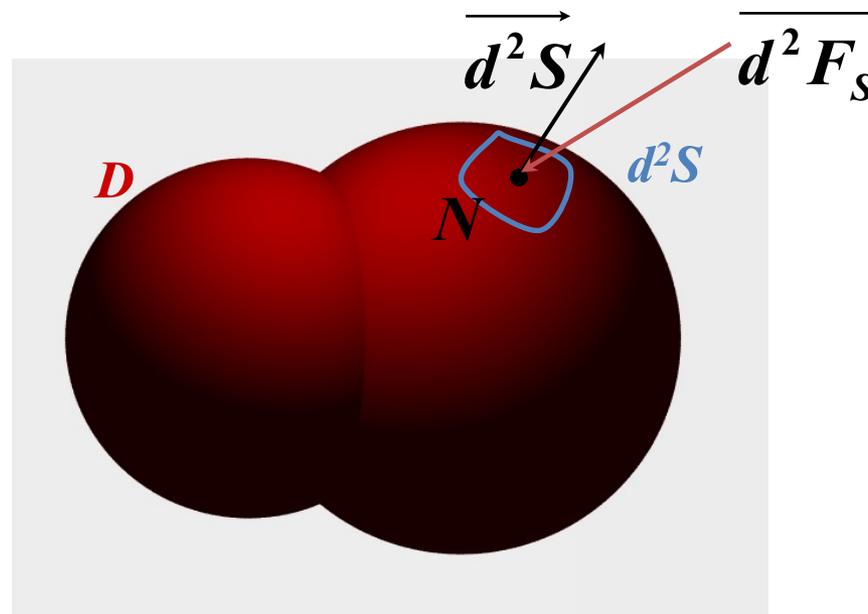
# Chapitre 1 : Généralités

## 3 Les forces de surface



Soit un point  $N$  de la surface délimitant le domaine  $D$  et  $d^2S$  un élément de surface centré en  $N$ .

Orientons  $\vec{d^2S}$  de l'intérieur vers l'extérieur et appelons  $\vec{d^2F_S}$  la force surfacique s'exerçant sur  $d^2S$ .



*Pour la suite, les exposants indiquant l'ordre des différentielles ne seront plus indiqués afin de ne pas les confondre avec l'ordre de dérivation.*

# Chapitre 1 : Généralités

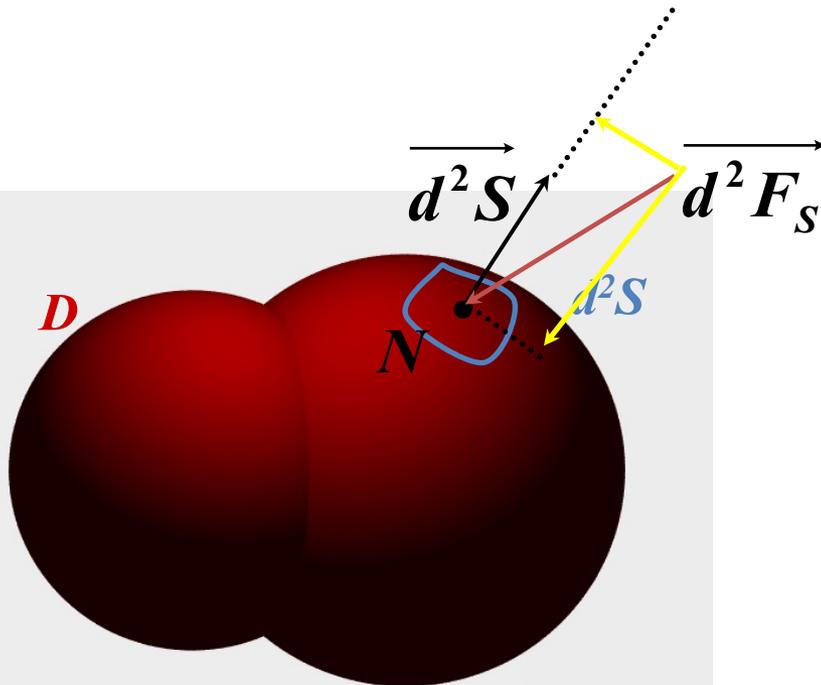
## 3 Les forces de surface



On appelle *contrainte* (force surfacique) exercée en  $N$  le vecteur :  $\vec{\tau}_s(N) = \frac{d\vec{F}_s}{dS} \Big|_N$

La norme de la contrainte a les dimensions d'une **pression**. Dans le système S.I elle s'exprime en pascals ( $N/m^2$ ).

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}, 1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$



On décompose cette contrainte en deux composantes :

- Une composante normale à la surface, c'est **la contrainte normale**
- Une composante tangente à la surface, c'est la **contrainte tangentielle** ou scission

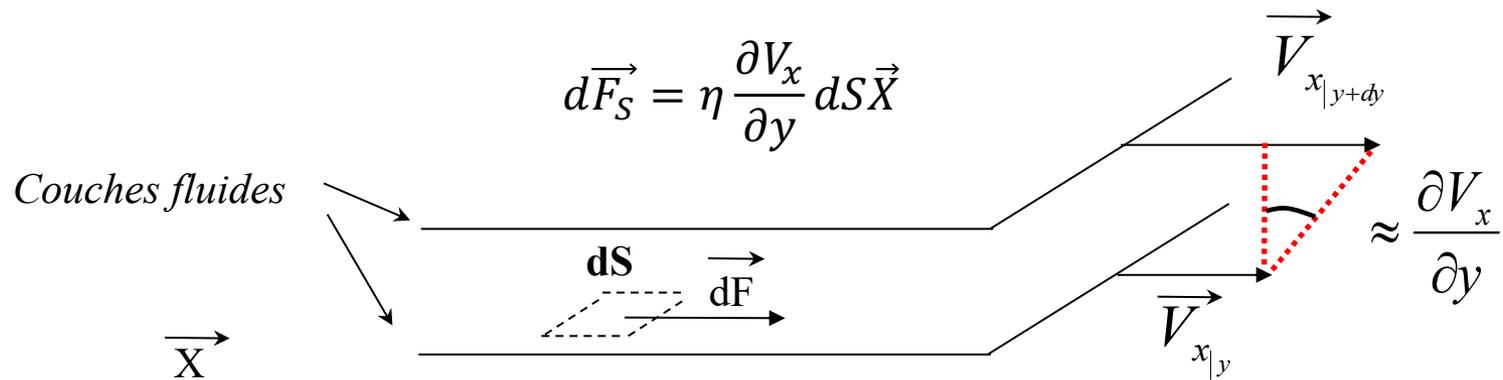


## 3.1 Les contraintes tangentielles (forces de viscosité)

- Assimilables à des forces de friction entre différentes couches fluides.
- Responsables de la dissipation de l'énergie.

On appelle fluide **non visqueux** ou **parfait**, un modèle de fluide dans lequel les forces de viscosité seraient inexistantes.

Dans le cas d'un **fluide réel**, on définit le coefficient de viscosité (dynamique) par la relation :



$\eta$  s'exprime en poiseuille ( $Pl = Pa \cdot s$ ).

Aux conditions normales de pressions et de températures CNPT ( $10^5 Pa$  et à  $20^\circ C$ ), on a un coefficient de viscosité de :

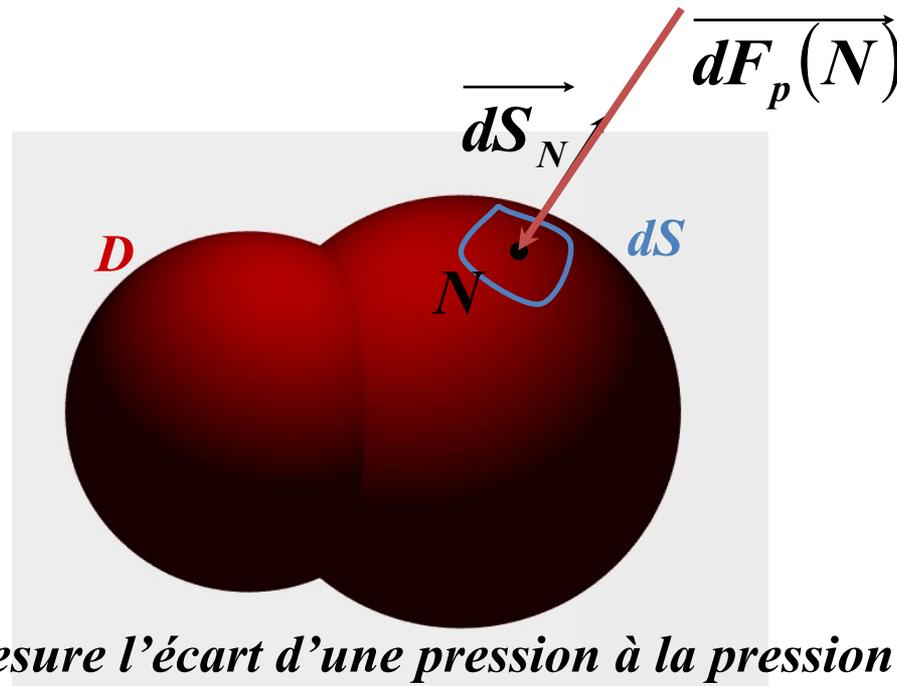
**0,001 Pl** pour l'eau,  
**0,85 Pl** pour la glycérine,  
 **$1,6 \cdot 10^{-5} Pl$**  pour l'air.



## 3.2 Les contraintes normales (forces de pression)

La force de pression élémentaire  $\overrightarrow{dF_p}$  s'appliquant à l'élément de surface  $d\overrightarrow{S}_N$  centré au point  $N$  de l'espace s'écrit :

$$\overrightarrow{dF_p}(N) = -P(N)d\overrightarrow{S}_N = -P(N)dS \vec{n}$$



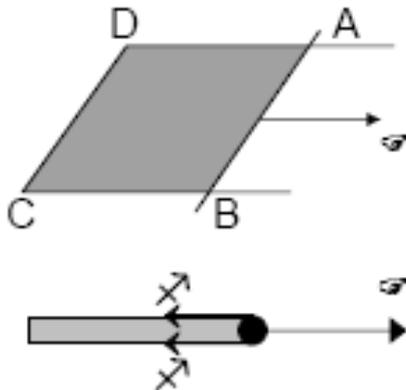
*Un manomètre mesure l'écart d'une pression à la pression atmosphérique :*

$$P = P_{atm}(10^5 Pa) + P_{mano}$$



A proximité de l'interface entre deux fluides → déséquilibre des forces attractives de cohésion moléculaire (plus forte pour les liquides que pour les gaz).

Ce déséquilibre est à l'origine des forces de tension de surface (tension superficielle) qui ont tendance à comprimer le fluide, à réduire autant que ce peut la surface présentée par l'interface (→ forme sphérique des gouttes d'eau).



Le liquide tire AB vers DC par une force  $f$  sur chaque face de la lame, proportionnelle à la longueur  $L$  :

$$f = \gamma L$$

Pour maintenir AB en équilibre, il faut lui appliquer une force  $F$  (qui ne dépend pas de la position de AB) :

$$F = 2 \cdot f = 2 \gamma L$$

(avec  $F$  en  $N$ ,  $L$  en  $m$  et  $\gamma$  en  $N \cdot m^{-1}$ )



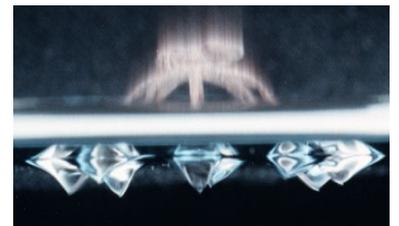
Dans la relation précédente, le coefficient  $\gamma$  s'appelle la **tension superficielle** du liquide.

eau (à 20 °C)  $73 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$

éthanol  $22 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$

mercure  $480 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$

- ⇒ formation d'un ménisque près des bords d'un récipient
- ⇒ permet à l'araignée de marcher sur l'eau sans couler
- ⇒ l'eau monte dans un capillaire alors que le mercure descend.



*P8 – 2ème Partie*

# **Chapitre 2 :**

# **La statique des fluides**

# Chapitre 2 : La Statique des fluides

## *1 Equation fondamentale de la statique des fluides.*



$$F_{vx} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{(x,y,z)}$$

$$F_{vy} = \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{(x,y,z)}$$

$$F_{vz} = \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{(x,y,z)}$$

$$\vec{F}_v = \overrightarrow{\text{grad}}(P)$$

Ou, exprimé avec la force massique :

$$\rho \vec{f}_v = \overrightarrow{\text{grad}}(P)$$

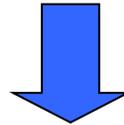
# Chapitre 2 : La Statique des fluides

- 3 Forces de contact exercées par un fluide statique sur un solide
- 3.1 Forces de contact entre un fluide et une paroi solide.
- 3.1.b Cas d'une paroi plane et horizontale dans le champ de pesanteur - Paradoxe de l'hydrostatique

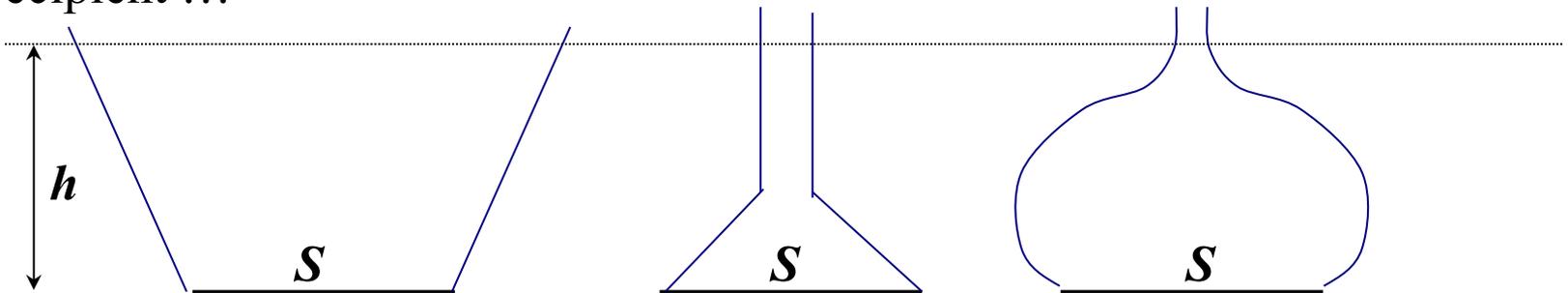


Dans un fluide surplombé par un gaz au repos, la pression s'exerçant en un point dépend de la hauteur de la colonne d'eau qui la surplombe :

$$P = P_0 + \rho g h$$



La force de pression s'exerçant sur le fond d'un récipient ne dépend que de la hauteur de fluide que contient ce récipient et de la surface du fond de ce récipient !!!



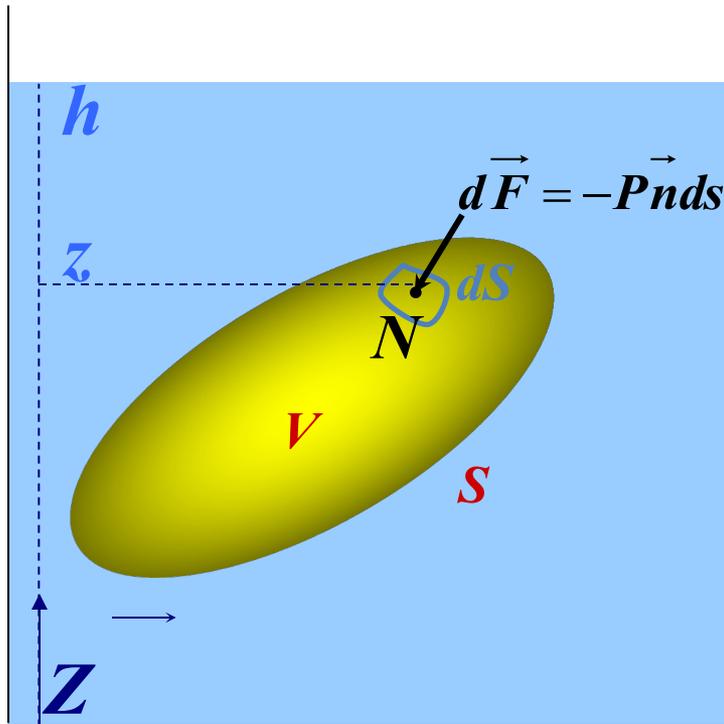
$$\vec{R} = \iint_S d\vec{F}(N) = \iint_S (P_0 + \rho g h) dS \vec{n} = (P_0 + \rho g h) \vec{n} \iint_S dS = (P_0 + \rho g h) S \vec{n}$$

# Chapitre 2 : La Statique des fluides

## 3 Forces de contact exercées par un fluide statique sur un solide

### 3.2 Le Principe d'Archimède (287-212 av J.C.)

#### 3.2.a Démonstration et énoncé du principe



Soit un objet solide de surface  $S$  et de volume  $V$  statiquement **immergé** dans un fluide.

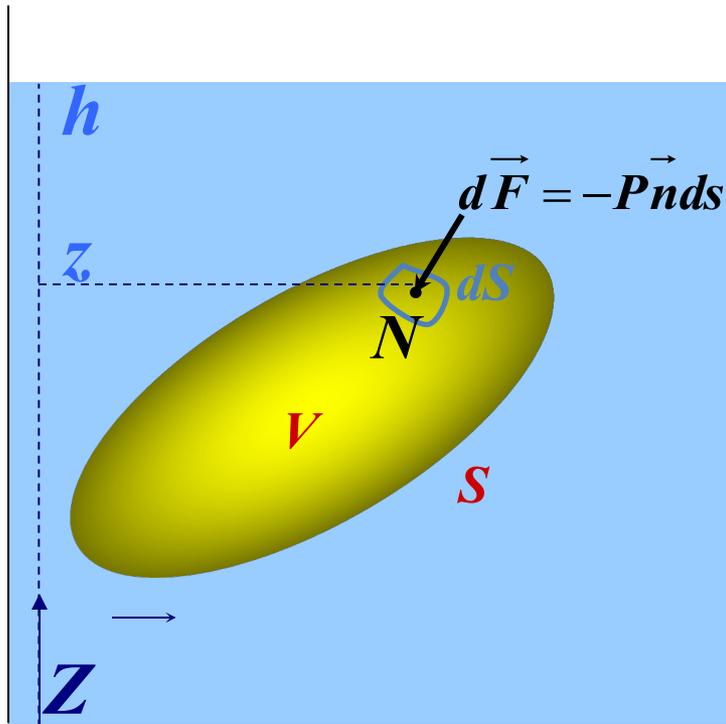
$$\vec{\pi} = \oiint_S -P\vec{n}dS$$

$$\vec{\pi} \cdot \vec{u} = \left( \oiint_S -P\vec{n}dS \right) \cdot \vec{u} = - \oiint_S \underbrace{(P \cdot \vec{u})}_{\phi} \vec{n}dS$$

**Théorème de Green-Ostrogradsky :** 
$$\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \text{div}(\vec{A}) dv$$

# Chapitre 2 : La Statique des fluides

- 3 Forces de contact exercées par un fluide statique sur un solide
- 3.2 Le Principe d'Archimède (287-212 av J.C.)
- 3.2.a Démonstration et énoncé du principe



On appelle *la poussée d'Archimède* la force résultante des forces de pression d'un fluide sur un corps totalement immergé.

$$\vec{\Pi} = \rho g V \vec{Z} = mg \vec{Z}$$

On observe que la poussée d'Archimède est une force verticale qui *s'oppose* à la force de pesanteur dont la norme est égale au **poids du liquide déplacé** par ce solide.

Le point d'application de cette force correspond au **centre de gravité du fluide déplacé**.

# Chapitre 2 : La Statique des fluides

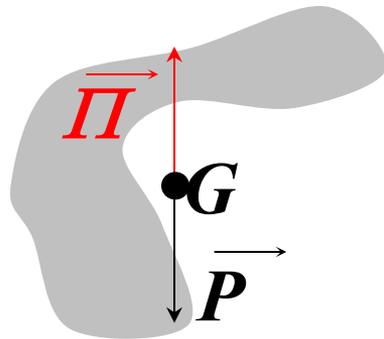
## 3 Forces de contact exercées par un fluide statique sur un solide

### 3.2 Le Principe d'Archimède (287-212 av J.C.)

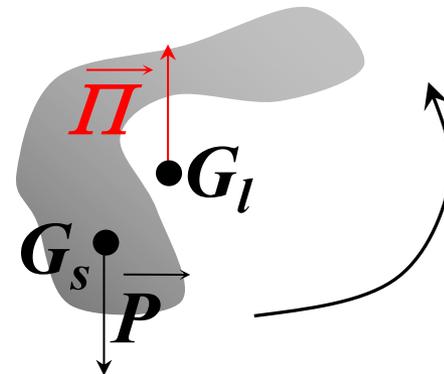
#### 3.2.b Problème de la stabilité d'un solide immergé



Si la répartition de masse dans le solide est inhomogène, alors les centres de gravités du solide et du liquide déplacé ne coïncident pas. Ceci implique un moment résultant des forces non nul ce qui a pour conséquence l'induction d'un mouvement de rotation du solide.



Cas d'un solide  
homogène



Cas d'un solide  
inhomogène

*P8 – 2ème Partie*

# **Chapitre 3 :**

# **La cinématique des fluides**



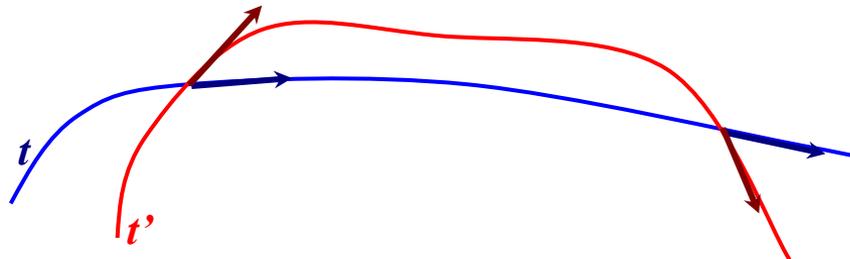
- Une trajectoire est le chemin suivi par une particule fluide au cours du temps.

*Elle est observable en utilisant un appareil photo muni d'un long temps de pose.*

- Une ligne d'émission est l'ensemble des particules fluides ayant coïncidées à un instant antérieur avec un point particulier.

*S'obtient en faisant une photographie instantanée de l'émission continue d'un traceur situé en un point donné.*

- Une ligne de courant Courbe qui, à un instant donné, admet comme tangente en chacun de ses points un vecteur vitesse.





- Tube de courant : surface formée par l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée.
- Champ uniforme : si le vecteur vitesse est le même en tout point. Dans ce cas, les lignes de courant sont des droites parallèles.
- Champ permanent ou stationnaire : si le vecteur vitesse est indépendant du temps

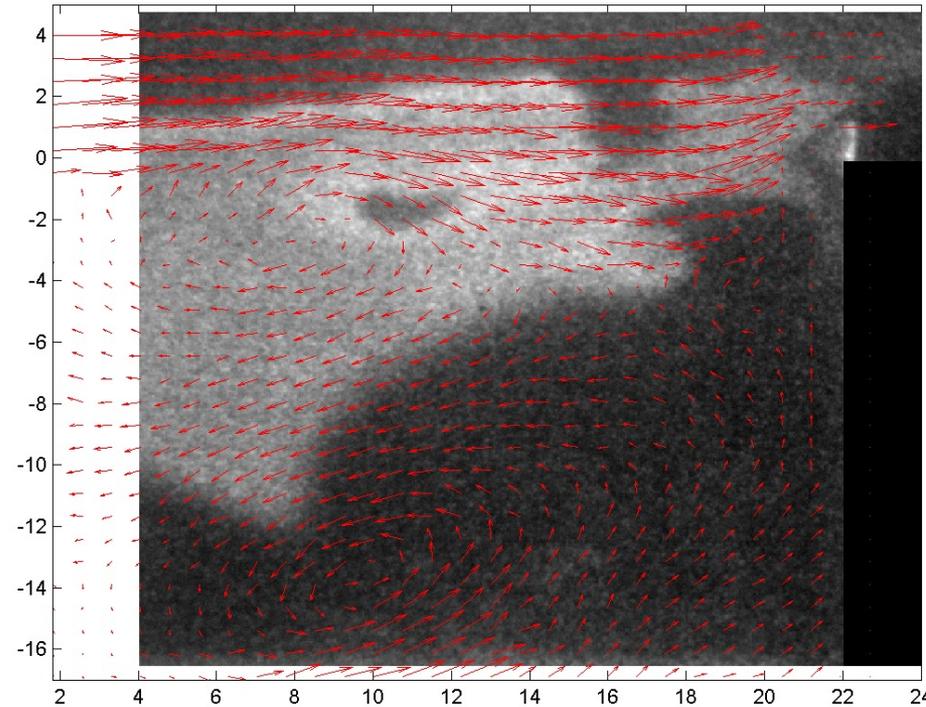
$$\frac{\partial}{\partial t} = \mathbf{0}$$

*Dans ce cas, les trajectoires, lignes de courants et lignes d'émission sont confondues.*



Introduite par Euler (1707-1783), cette description repose sur la connaissance de l'évolution au cours du temps de grandeurs macroscopiques locales telles que masse volumique, température, vitesse, pression **en chaque point de l'espace**.

Dans la description d'Euler les variables position et temps sont indépendantes.



# Chapitre 3 : La cinématique des fluides

## 3 Expression de l'accélération d'un élément de fluide.

### 3.2 En description eulerienne

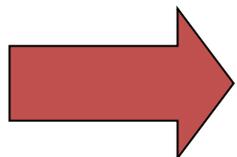


$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} U_x + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} U_y + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} U_z + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$\vec{A}$  *Champ vectoriel étudié*  
 $\vec{U}$  *Vitesse de la particule fluide*

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \\ \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \\ \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} U_x \\ U_y \\ U_z \end{array} \right]$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\quad) = \vec{\nabla} = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right]$$



$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\text{caractère non permanent}} + \underbrace{[\vec{\nabla}(\vec{A})]\vec{U}}_{\text{caractère non uniforme}}$$

dérivée particulière

C'est la « **dérivée particulière** » ou « **dérivée hydrodynamique** » du champ **A**.

# Chapitre 3 : La cinématique des fluides

## 3 Expression de l'accélération d'un élément de fluide.

### 3.2 En description eulerienne



$$\vec{a} = \frac{d\vec{U}}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial x} U_x + \frac{\partial U_x}{\partial y} U_y + \frac{\partial U_x}{\partial z} U_z + \frac{\partial U_x}{\partial t} \\ \frac{\partial U_y}{\partial x} U_x + \frac{\partial U_y}{\partial y} U_y + \frac{\partial U_y}{\partial z} U_z + \frac{\partial U_y}{\partial t} \\ \frac{\partial U_z}{\partial x} U_x + \frac{\partial U_z}{\partial y} U_y + \frac{\partial U_z}{\partial z} U_z + \frac{\partial U_z}{\partial t} \end{vmatrix}$$

# Chapitre 3 : La cinématique des fluides

## 3 Expression de l'accélération d'un élément de fluide.

### 3.2 En description eulerienne



Remarque : On peut démontrer mathématiquement que l'accélération particulaire peut également s'écrire sous la forme :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \underbrace{\frac{1}{2} \overrightarrow{grad}(U^2) + rot(\vec{U}) \wedge \vec{U}}_{(\vec{\nabla} \vec{U}) \cdot \vec{U}}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{X}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \vec{X}_x \\ \frac{\partial}{\partial y} & \vec{X}_y \\ \frac{\partial}{\partial z} & \vec{X}_z \end{vmatrix} \wedge$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{X}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{X}$$

Où le rotationnel de la vitesse s'appelle la **vorticité** et la moitié de cette grandeur le vecteur tourbillon :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot}(\vec{U})$$

# Chapitre 3 : La cinématique des fluides

## 5 Equation de la continuité

(conservation de la masse)



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathit{div}(\rho \vec{U}) &= \mathbf{0} \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \mathit{div}(\vec{U}) &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = \mathbf{0}$$

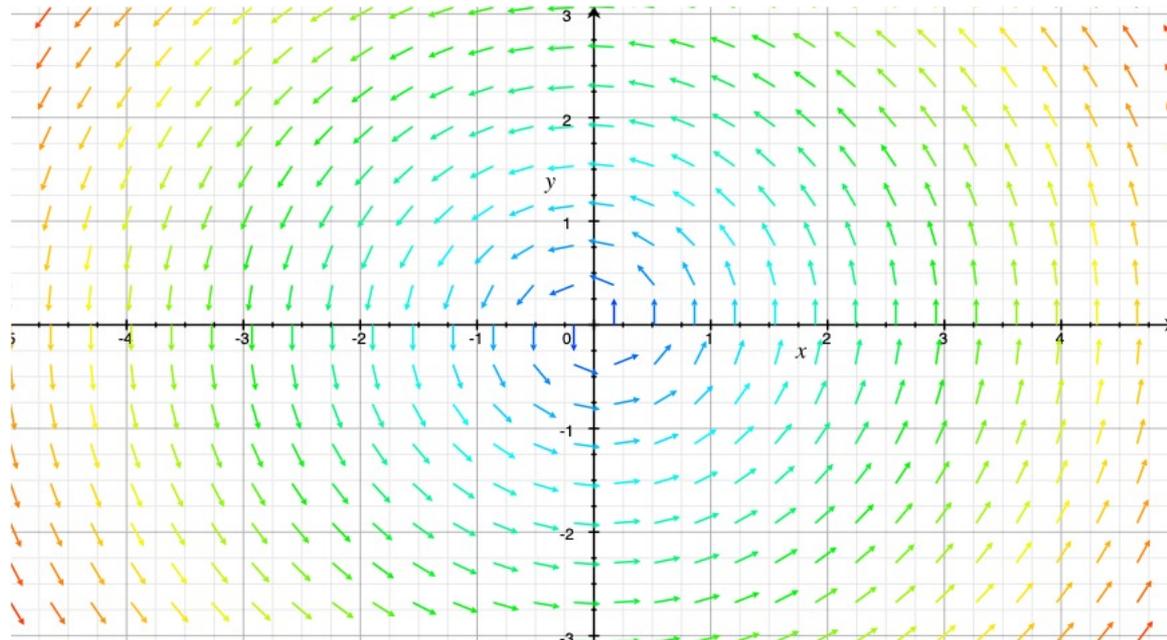
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot (\vec{U}) = \mathbf{0}$$



Illustration du calcul de rotationnel

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$



$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

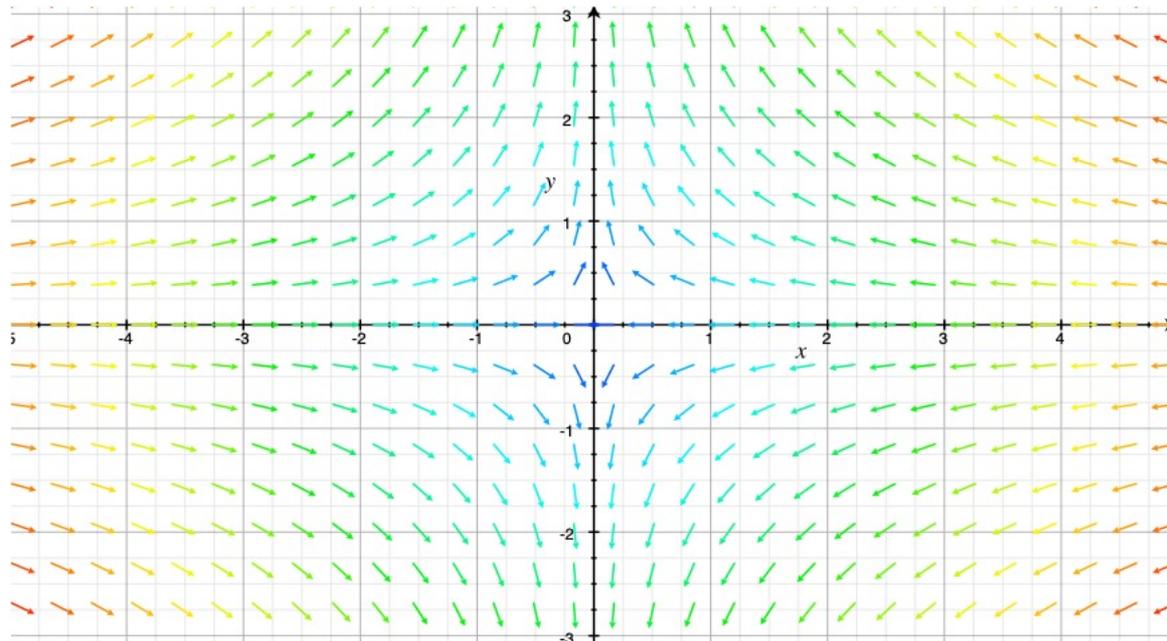
$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Illustration du calcul de rotationnel

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$



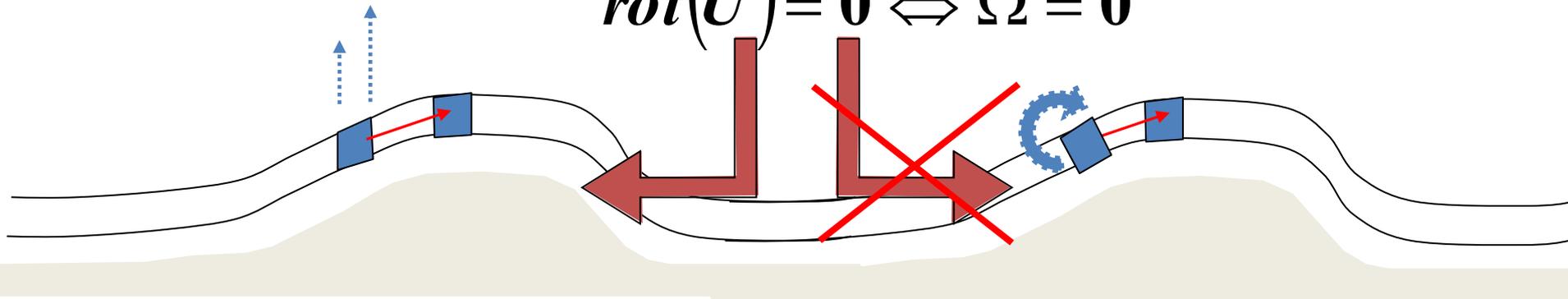
$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



- Un écoulement irrotationnel vérifie en tout point de l'espace la relation suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{U}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{0}$$



- Un écoulement dérive d'un potentiel de vitesse  $\varphi$  si on peut écrire

$$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{\text{grad}}(\varphi)$$

*Équivalant aux potentiels des forces en mécanique du point.*



Par définition, les lignes de courant sont tangentes localement aux vecteurs vitesse. Considérons en un point de l'espace un vecteur déplacement élémentaire  $\vec{dl}(dx, dy, dz)$  colinéaire au vecteur vitesse. Cela implique que :

$$\vec{dl} = \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{vmatrix}$$

$$\frac{U_x}{dx} = \frac{U_y}{dy} = \frac{U_z}{dz}$$

*P8 – 2ème Partie*

# **Chapitre 4 :**

# **La dynamique des fluides**



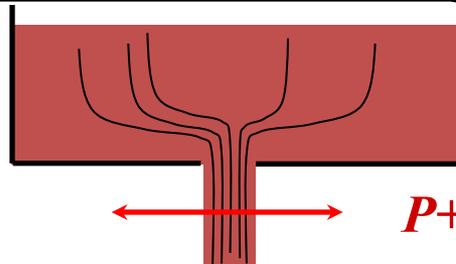
$$\vec{F}_v \cdot \vec{N} = \frac{\partial P}{\partial x_n}$$

En considérant un fluide soumis aux seules forces de gravité ( $\vec{F}_v = -\vec{\nabla}(\rho gz)$ ), on obtient la relation :

$$-\frac{\partial \rho gz}{\partial x_n} = \frac{\partial P}{\partial x_n}$$

Pour un écoulement de fluide à lignes de courant parallèles, uniquement soumis aux forces de pesanteur, le long d'une **section perpendiculaire aux lignes de courant**, la quantité  $P + \rho gz = C^{st}$ .

*En d'autres termes, pour un écoulement à lignes de courant parallèles, l'équation fondamentale de la statique des fluides s'applique perpendiculairement à ces lignes de courant.*



$$P + \rho gz = C^{st} \Rightarrow P = P_0$$



*(Daniel Bernoulli (1700-1782))*

1. L'hypothèse de base de l'emploi de l'équation d'Euler est que le fluide est **non visqueux**.

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(U^2) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{U}) \wedge \vec{U} = \vec{f}_v - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}}(P)$$

2. Les forces de volume dérivent d'un potentiel  $u_v$  (potentiel des forces par unité de masse)

$$\vec{f}_v = -\overrightarrow{\text{grad}}(u_v) = -\vec{\nabla} u_v \quad \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla}(U^2) + (\vec{\nabla} \wedge \vec{U}) \wedge \vec{U} = -\vec{\nabla} u_v - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P$$

3. On observe l'évolution de cette équation le long d'une ligne de courant :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \cdot d\vec{l} + \frac{1}{2} \vec{\nabla}(U^2) \cdot d\vec{l} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{U}) \wedge \vec{U} \cdot d\vec{l} = -\vec{\nabla} u_v \cdot d\vec{l} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \cdot d\vec{l}$$

$$dA = \overrightarrow{\text{grad}}(A) \cdot d\vec{l} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \cdot d\vec{l} + \frac{1}{2} d(U^2) + du_v + \frac{dP}{\rho} = - \underbrace{(\vec{\nabla} \wedge \vec{U}) \wedge \vec{U}}_{\vec{0}} \cdot \underbrace{d\vec{l}}_{\parallel \vec{U}}$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \cdot \vec{dl} + d\left(\frac{U^2}{2} + u_v\right) + \frac{dP}{\rho} = 0$$

*Forme instationnaire*

# Chapitre 4 : La dynamique des fluides

## 3 Application à l'équation de Bernoulli

### 3.1 Les hypothèses de validité



$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \cdot \vec{dl} + d\left(\frac{U^2}{2} + u_v\right) + \frac{dP}{\rho} = 0$$

4. Si de plus on considère l'écoulement **stationnaire** :

$$d\left(\frac{U^2}{2} + u_v\right) + \frac{dP}{\rho} = 0$$

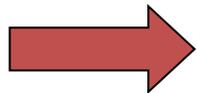
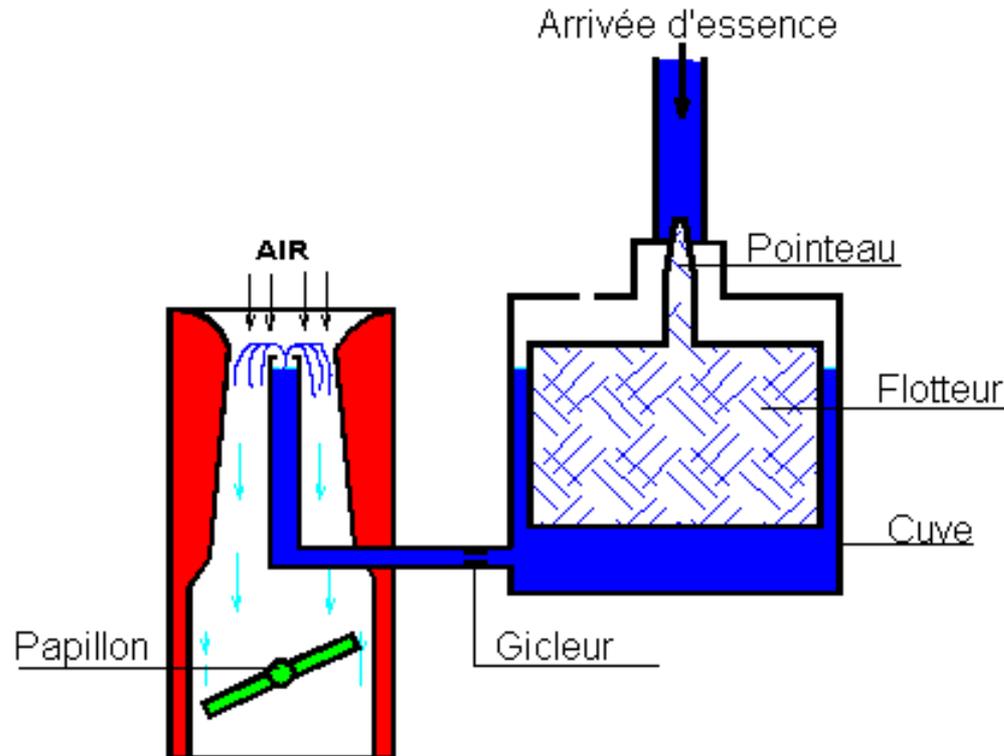
5. Et **incompressible** :

$$d\left(\frac{U^2}{2} + u_v + \frac{P}{\rho}\right) = 0$$



## 3 Application à l'équation de Bernoulli

### 3.4 Applications dans le cas du champ de force gravitationnel terrestre

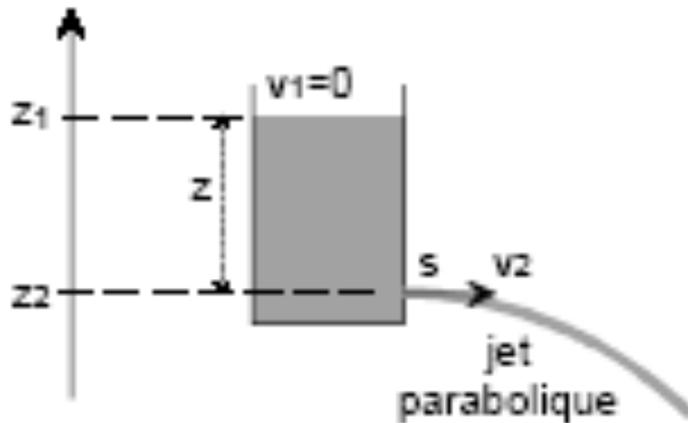


$$P_A - P_B = \frac{q_m^2}{2\rho} \left( \frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2} \right) + \rho g (z_B - z_A)$$



## 3 Application à l'équation de Bernoulli

### 3.4 Applications dans le cas du champ de force gravitationnel terrestre



Soit un réservoir de section  $S$ , muni d'un petit orifice à sa base, de section  $s$ .

Considérons une ligne de courant partant de la surface et arrivant à l'orifice.

Étant donné le rapport  $s/S \ll 1$ , la conservation du débit implique que la vitesse du fluide à la surface libre est négligeable devant celle du fluide à l'orifice.

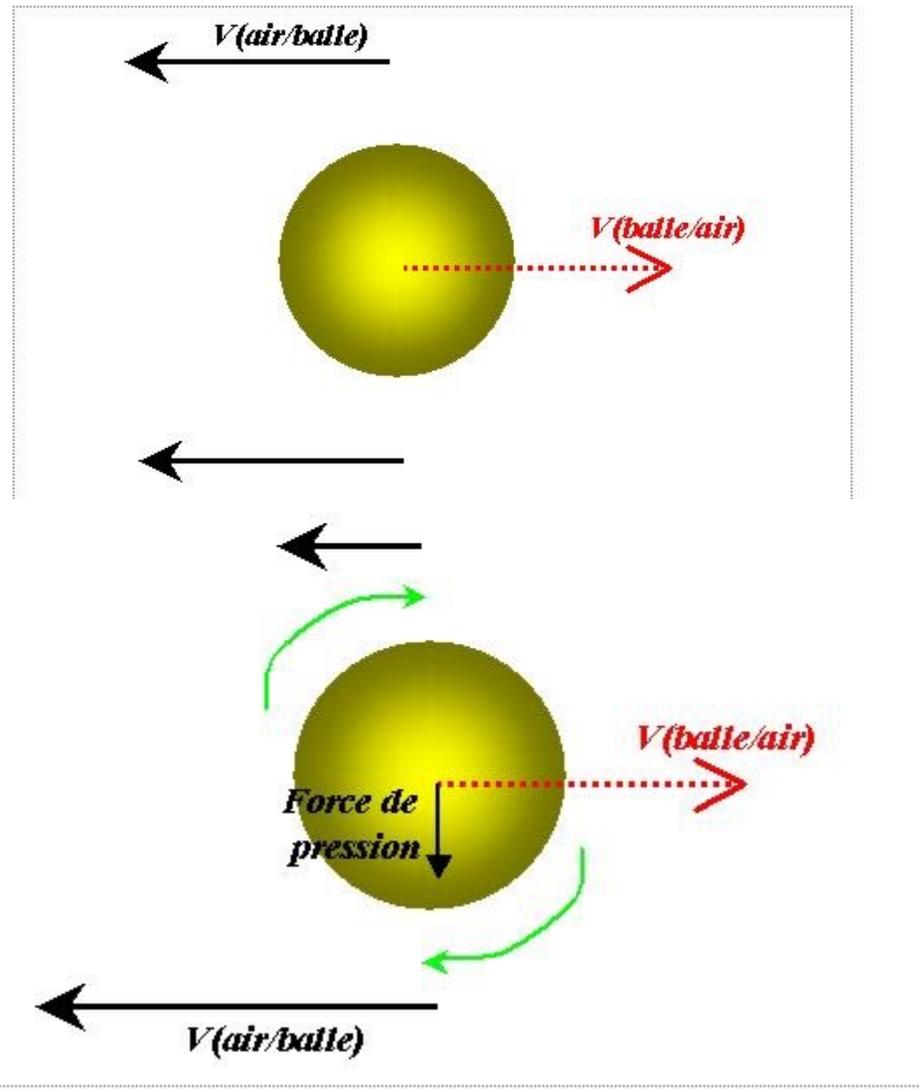
$$P_0 + 0 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho U_2^2 + \rho g z_2$$

➔ 
$$U_2 = \sqrt{2gZ}$$

*Le débit d'eau d'un robinet alimenté par un château d'eau dépend de la dénivellation entre les deux et de la section du robinet.*



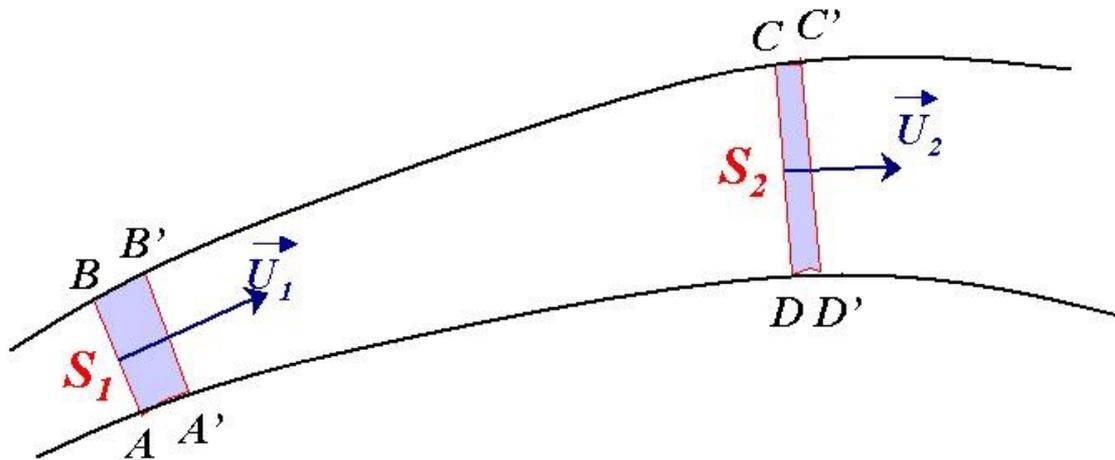
## Effet Magnus





## 4 Théorème d'Euler

### 4.1 Démonstration et énoncé



Soit un écoulement **permanent** de fluide **parfait**.

Considérons l'ensemble des particules fluides contenues dans un tube de courant construit pour être suffisamment fin pour que les vitesses du fluide soient uniformes à ses extrémités  $S_1$  et  $S_2$  et normales.

Les sections considérées sont normales à ces vecteurs vitesse.

Les sections  $S_1$  et  $S_2$  suivent le système fluide dans le temps.

Ainsi, pendant la durée élémentaire  $dt$ , la section  $S_1=AB$  devient  $A'B'$  ce qui équivaut à un déplacement de  $V_1 dt$  et la section  $S_2=CD$  devient  $C'D'$  ce qui équivaut à la longueur  $V_2 dt$ .



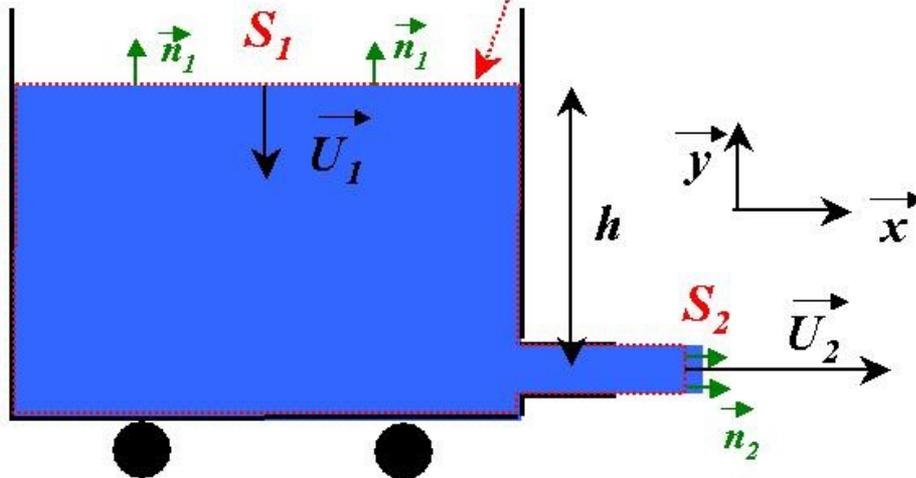
$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \oiint_S \rho(\vec{U} \cdot \vec{n})\vec{U}dS$$

Attention  $\overrightarrow{F}_{ext}$  est exprimé en Newton et correspond aux forces de volume et de surface (pas de dissipation puisque le fluide est considéré parfait).

Pour un fluide **parfait** et **stationnaire** délimité par une **surface de contrôle** (fermée), la somme des **forces extérieures** appliquées à ce système fluide est égale au **flux de quantité de mouvement** de ce fluide au travers de la surface de contrôle.



*Surface de contrôle*



$$\sum \vec{F}_s + \sum \vec{F}_v = \underbrace{\iint_S \rho (\vec{U} \cdot \vec{n}) \vec{U} ds}$$

*Système :*

liquide contenu dans la surface de contrôle

*Référentiel :*

Lié au wagon, considéré galiléen

$$\iint_S \rho (\vec{U} \cdot \vec{n}) \vec{U} ds = \iint_{S_1} \rho (\vec{U} \cdot \vec{n}_1) \vec{U} ds + \iint_{S_2} \rho (\vec{U} \cdot \vec{n}_2) \vec{U} ds$$

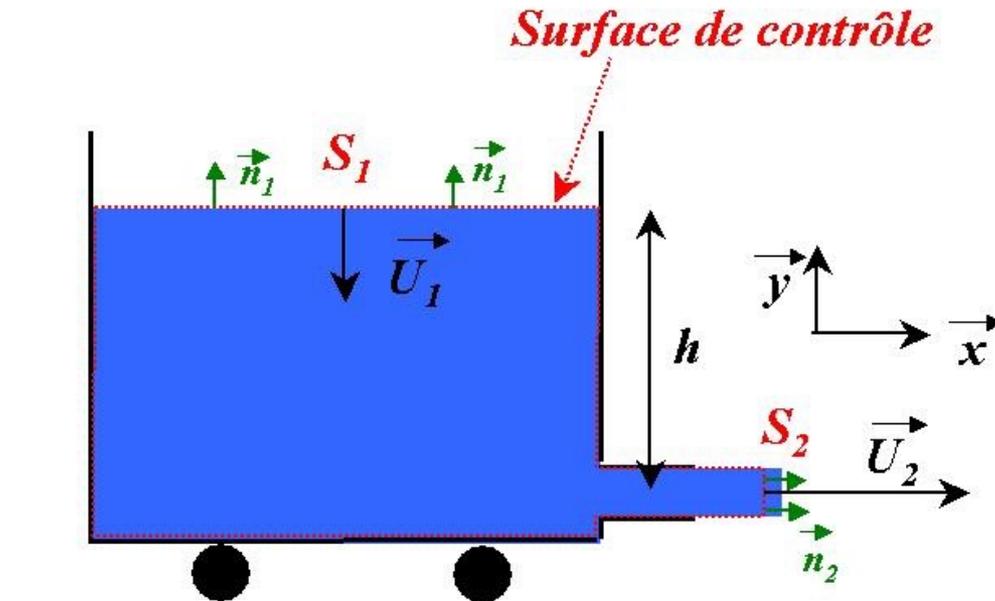
$$= -\rho \iint_{S_1} U_1 \vec{U}_1 ds + \iint_{S_2} \rho U_2 \vec{U}_2 ds$$

$$= \rho U_1^2 S_1 \vec{y} + \rho U_2^2 S_2 \vec{x}$$



## 4 Théorème d'Euler

### 4.2 Exemple d'application



$$\underbrace{\sum \vec{F}_s + \sum \vec{F}_v}_{\text{}} = \iint_S \rho (\vec{U} \cdot \vec{n}) \vec{U} \, ds$$

Forces de pression de l'air puis de l'eau le long des sections  $S_1$  et  $S_2$  :  $-P_0 S_1 \vec{y} - P_0 S_2 \vec{x}$

Forces d'action du wagon sur le liquide (via les surfaces en contact) :  $\vec{F}_w$

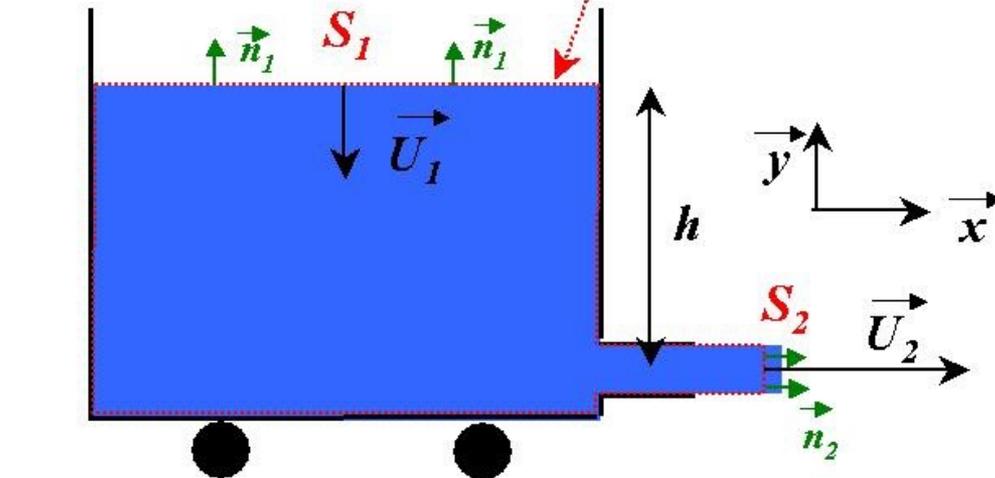
Force de pesanteur :  $-\rho V g \vec{y}$



## 4 Théorème d'Euler

### 4.2 Exemple d'application

*Surface de contrôle*



$$\underbrace{\sum \vec{F}_s + \sum \vec{F}_v = \iint_S \rho (\vec{U} \cdot \vec{n}) \vec{U} ds}$$

$$\rho U_1^2 S_1 \vec{y} + \rho U_2^2 S_2 \vec{x} = -P_0 S_1 \vec{y} - P_0 S_2 \vec{x} + \vec{F}_w - \rho V g \vec{y}$$

En utilisant la vitesse de Toricelli, cela donne :  $U_2 = \sqrt{2gh}$  et  $U_1 \approx 0$

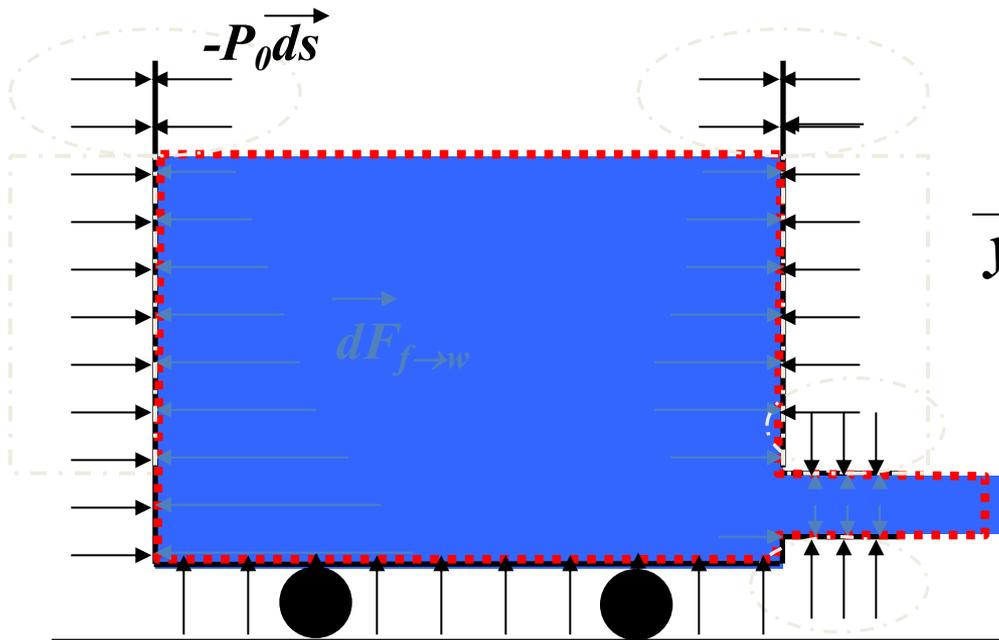
$$\vec{F}_{f \rightarrow w} = -\vec{F}_w = -\rho 2gh S_2 \vec{x} - P_0 S_1 \vec{y} - P_0 S_2 \vec{x} - \rho V g \vec{y}$$



*Application à la mise en mouvement du wagon :*

**Systeme :** le wagon de masse  $m_w$

**Réf :** La route



*Bilan des forces :*

Action du liquide :

$$\vec{F}_{f \rightarrow w}$$

Action de l'air :

$$\vec{F}_{air} = \iint -P_0 \vec{n} ds$$

$$\vec{F}_{air} = P_0 S_1 \vec{y} + P_0 S_2 \vec{x}$$

Action de la pesanteur :

$$\vec{P} = -m_w \vec{g} \vec{y}$$

Réaction du sol :

$$\vec{R} = R \vec{y}$$



## 4 Théorème d'Euler

### 4.2 Exemple d'application

*PFD :*

*Application à la mise en mouvement du wagon :*

**Systeme** : le wagon de masse  $m_w$

**Réf** : La route

$$m_w \vec{a}_w = \underbrace{-\rho 2ghS_2 \vec{x} - P_0 S_1 \vec{y} - P_0 S_2 \vec{x}}_{\vec{F}_{f \rightarrow w}} - \rho V g \vec{y} + \underbrace{P_0 S_1 \vec{y} + P_0 S_2 \vec{x}}_{\vec{F}_{air}} - m_w g \vec{y} + R \vec{y}$$

$$m_w \vec{a}_w = -\rho 2ghS_2 \vec{x} - \rho V g \vec{y} - m_w g \vec{y} + R \vec{y}$$

La réaction du rail compense les actions verticales, la composante active au mouvement est :

$$m_w \vec{a}_w = -\rho 2ghS_2 \vec{x}$$

$$\vec{a}_w = -\frac{\rho 2ghS_2}{m_w} \vec{x}$$

# Chapitre 4 : La dynamique des fluides

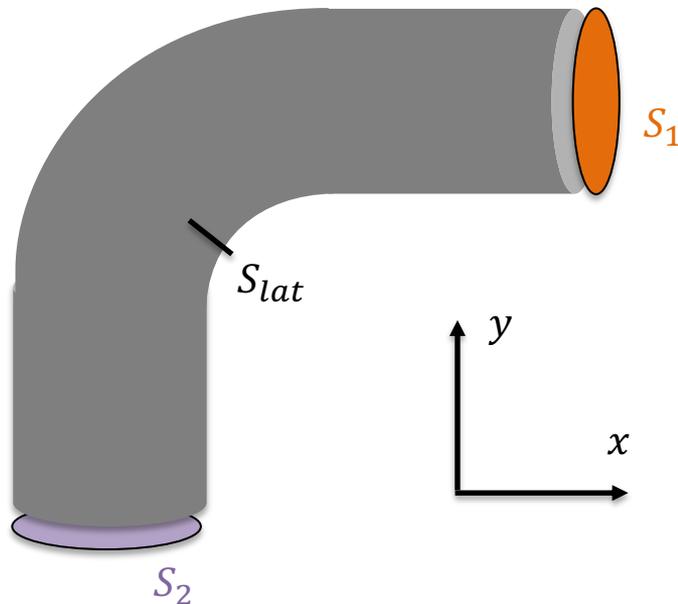
## 4 Théorème d'Euler

### 4.2 Exemple d'application



Soit un tube de section circulaire de diamètre **0.2 m**, coudé à angle droit et posé sur un plan horizontal. Il contient de l'eau ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) portée à la pression moyenne de **6 bars**.

1. Quelle est, en projection horizontale, la résultante des forces de pression exercées par l'eau sur le coude quand la vitesse d'écoulement est négligeable ?
2. Que devient cette résultante quand la vitesse d'écoulement correspond à un débit de  $0.16 \text{ m}^3/\text{s}$ . On négligera les frottements fluides.
3. Les coups de bélier sont causés par la différence de pression lorsque l'écoulement s'établit rapidement. Evaluer l'accroissement d'effort subi par le tuyau lors de la mise en écoulement.





## 4 Théorème d'Euler

### 4.2 Exemple d'application

Soit un tube de section circulaire de diamètre **0.2 m**, coudé à angle droit et posé sur un plan horizontal. Il contient de l'eau ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) portée à la pression moyenne de **6 bars**.

1. **Quelle est, en projection horizontale, la résultante des forces de pression exercées par l'eau sur le coude quand la vitesse d'écoulement est négligeable ?**

On définit la surface de contrôle (en gris)

On fait le bilan des forces extérieures:

- Forces de pression  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$
- Poids de l'eau  $\vec{P} = -mg\vec{z}$
- Action du coude sur l'eau  $\vec{R}$

On a en statique on à alors:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$$

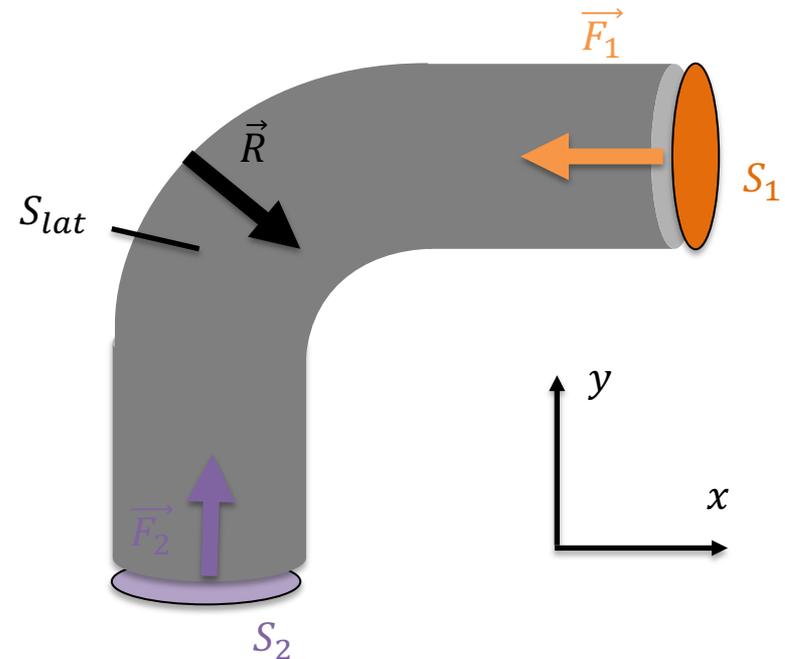
Avec  $S = S_1 = S_2$  :

$$\vec{F}_1 = -P \times \frac{\pi D^2}{4} \vec{e}_x$$

$$\vec{F}_2 = P \times \frac{\pi D^2}{4} \vec{e}_y$$

On a donc :

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} P \times \frac{\pi D^2}{4} \\ -P \times \frac{\pi D^2}{4} \\ mg \end{pmatrix}$$



# Chapitre 4 : La dynamique des fluides

## 4 Théorème d'Euler

### 4.2 Exemple d'application



Soit un tube de section circulaire de diamètre **0.2 m**, coudé à angle droit et posé sur un plan horizontal. Il contient de l'eau ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) portée à la pression moyenne de **6 bars**.

1. **Quelle est, en projection horizontale, la résultante des forces de pression exercées par l'eau sur le coude quand la vitesse d'écoulement est négligeable ?**

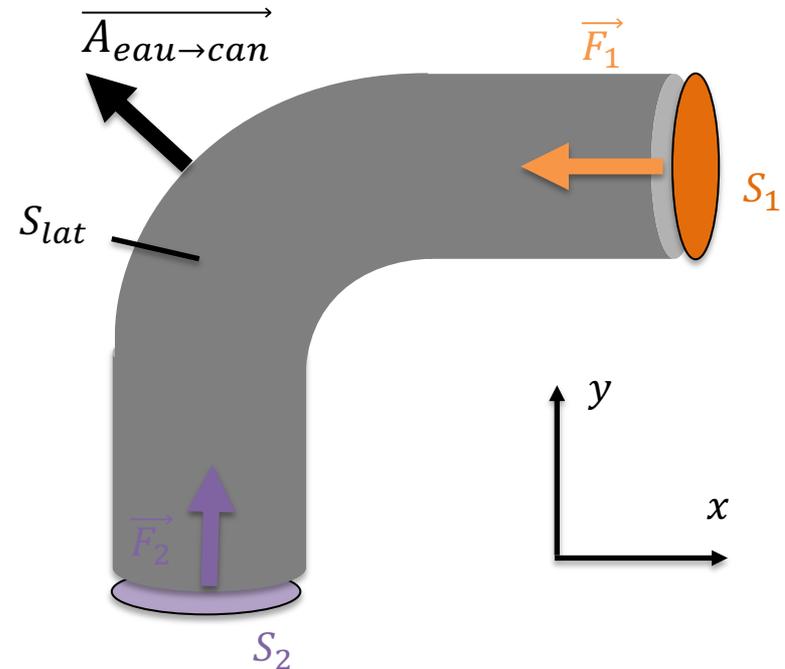
Par la loi de l'action et de la réaction, il vient que l'action de l'eau sur la canalisation est :

$$\vec{A}_{eau \rightarrow can} = -\vec{R} = \begin{pmatrix} -P \times \frac{\pi D^2}{4} \\ P \times \frac{\pi D^2}{4} \\ -mg \end{pmatrix}$$

La norme de cette action dans le plan qui contient la canalisation

(ou en négligeant le poids) est donc :

$$\begin{aligned} \sqrt{(PS)^2 + (-PS)^2} &= PS\sqrt{2} = 6.10^5 \times \pi \times \frac{0.2^2}{4} \times \sqrt{2} \\ &= 26657N \end{aligned}$$





## 4 Théorème d'Euler

### 4.2 Exemple d'application

Soit un tube de section circulaire de diamètre **0.2 m**, coudé à angle droit et posé sur un plan horizontal. Il contient de l'eau ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) portée à la pression moyenne de **6 bars**.

2. Que devient cette résultante quand la vitesse d'écoulement correspond à un débit de **0.16 m<sup>3</sup>/s**. On négligera les frottements fluides.

Avec l'écoulement établi dans la conduite et avec le théorème d'Euler on a maintenant:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R} - mg\vec{z} = \iint_S \rho(\vec{V} \cdot \vec{n})\vec{V} dS$$

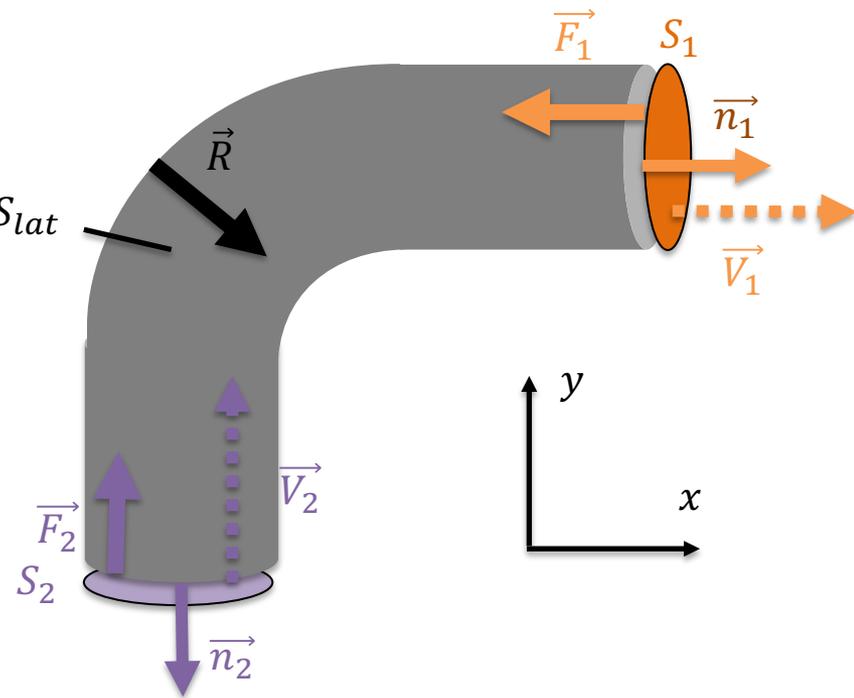
Mis à part en section d'entrée et de sortie  $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$

$$\iint_{S_1} \rho(\vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1)\vec{V}_1 dS + \iint_{S_2} \rho(\vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2)\vec{V}_2 dS = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R} - mg\vec{z}$$

$$\rho V_1^2 S_1 \vec{e}_x - \rho V_2^2 S_2 \vec{e}_y = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R} - mg\vec{z}$$

Si  $S = S_1 = S_2$  on aura alors  $V_1 = V_2 = V$  (le débit volumique se conserve)

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} P \times \frac{\pi D^2}{4} + \rho V^2 S \\ -P \times \frac{\pi D^2}{4} - \rho V^2 S \\ mg \end{pmatrix}$$





## 4 Théorème d'Euler

### 4.2 Exemple d'application

Soit un tube de section circulaire de diamètre **0.2 m**, coudé à angle droit et posé sur un plan horizontal. Il contient de l'eau ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) portée à la pression moyenne de **6 bars**.

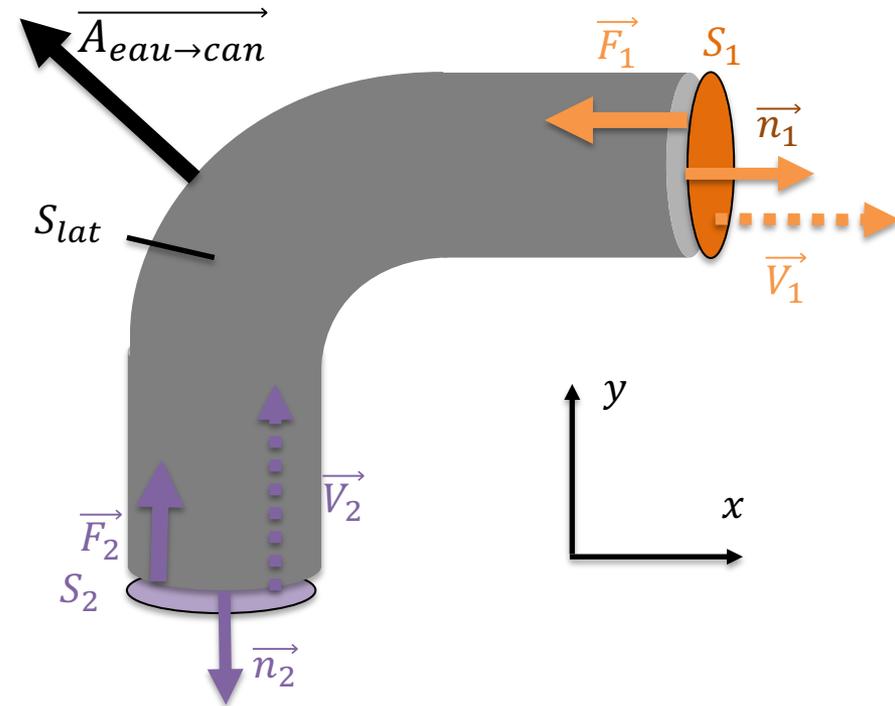
2. Que devient cette résultante quand la vitesse d'écoulement correspond à un débit de **0.16 m<sup>3</sup>/s**. On négligera les frottements fluides.

Par la loi de l'action et de la réaction, il vient que l'action de l'eau sur la canalisation est :

$$\vec{A}_{\text{eau} \rightarrow \text{can}} = -\vec{R} = \begin{pmatrix} -P \times \frac{\pi D^2}{4} - \rho V^2 S \\ P \times \frac{\pi D^2}{4} + \rho V^2 S \\ -mg \end{pmatrix}$$

La norme de cette action dans le plan qui contient la canalisation (ou en négligeant le poids) est donc :

$$\begin{aligned} & \sqrt{(-PS - \rho V^2 S)^2 + (PS + \rho V^2 S)^2} \\ &= \sqrt{2} \left| PS + \rho V^2 S \right| = \sqrt{2} \left| PS + \frac{\rho Q_v^2}{S} \right| \\ &= \sqrt{2} \times \left| 6.10^5 \times 0.0314 + 1000 \times \frac{0.16^2}{0.0314} \right| \\ &= 26657 + 1153 = 27810 \text{ N} \end{aligned}$$



# Chapitre 4 : La dynamique des fluides

## 4 Théorème d'Euler

### 4.2 Exemple d'application



Soit un tube de section circulaire de diamètre **0.2 m**, coudé à angle droit et posé sur un plan horizontal. Il contient de l'eau ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) portée à la pression moyenne de **6 bars**.

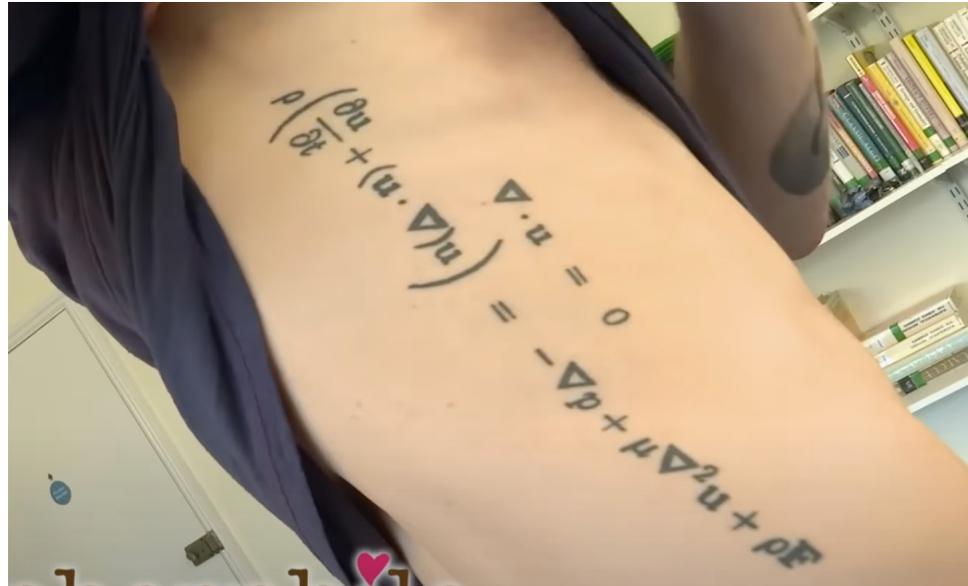
- 3. Les coups de bélier sont causés par la différence de pression lorsque l'écoulement s'établit rapidement. Evaluer l'accroissement d'effort subi par le tuyau lors de la mise en écoulement**

Le débit (160 litres/s) impose une action supplémentaire de 1153N c'est l'équivalent du poids exercé par une masse de 117kg d'eau (ou un volume de 117 litres).

Lorsque l'on ouvre brutalement une vanne le débit s'établit rapidement et le coude subit alors une force supplémentaire de 1153N.

# Chapitre 4 : La dynamique des fluides

## 5 Equation de Navier-Stokes



<https://www.youtube.com/watch?v=ERBVFcutl3M&t=398s>



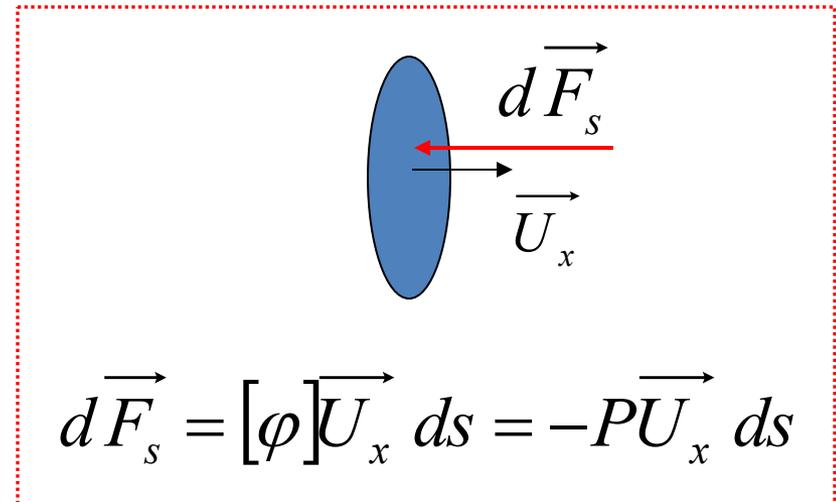
On définit le tenseur des contraintes  $[\varphi]$  tel que :

$$\vec{F}_S = [\varphi] \vec{n} dS$$

La contrainte est une force (vecteur) par unité de surface qui dépend de l'orientation de la surface sur laquelle s'applique cette contrainte.

Par exemple, dans le cas d'un fluide parfait, le tenseur n'est constitué que des forces de pressions :

$$\vec{F}_S = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix} \vec{n} dS$$





Mais, en tenant compte des forces de viscosité, des termes non diagonaux apparaissent (voir première partie du cours) et le tenseur  $[\varphi]$  devient plus généralement (sans démonstration) :

$$\varphi_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \operatorname{div}(\vec{U})$$

Pour un fluide incompressible:  $\operatorname{div}(\vec{U}) = 0$

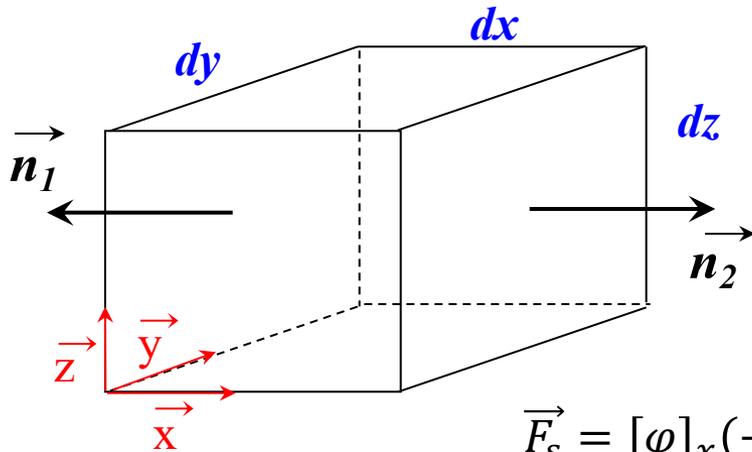
$$\varphi_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad \longrightarrow \quad \vec{F}_s = \begin{bmatrix} -P + \mu 2 \frac{\partial U_x}{\partial x} & \mu \left( \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) & -P + \mu 2 \frac{\partial U_y}{\partial y} & \mu \left( \frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) & \mu \left( \frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) & -P + \mu 2 \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{bmatrix} \vec{n} dS$$

**Que devient l'équation fondamentale de la dynamique des fluides si on prend en compte ces composantes tangentielles des contraintes surfaciques pour un fluide incompressible?**



Sur notre volume élémentaire, en représentation cartésienne

→ Bilan des forces surfaciques :



Les contraintes s'appliquant à chacune des 6 surfaces ont des composantes des vitesses dans les trois directions !

$$\vec{F}_s = \underbrace{[\varphi]_x(-\vec{x})dydz + [\varphi]_{x+dx}(\vec{x})dydz}_{\text{forces portant sur } \vec{x}}$$

$$+ \underbrace{[\varphi]_y(-\vec{y})dxdz + [\varphi]_{y+dy}(\vec{y})dxdz}_{\text{forces portant sur } \vec{y}} + \underbrace{[\varphi]_z(-\vec{z})dydx + [\varphi]_{z+dz}(\vec{z})dydx}_{\text{forces portant sur } \vec{z}}$$

$$\vec{F}_s = \underbrace{([\varphi]_{x+dx} - [\varphi]_x)\vec{x}dydz}_{\text{forces portant sur } \vec{x}} + \underbrace{([\varphi]_{y+dy} - [\varphi]_y)\vec{y}dxdz}_{\text{forces portant sur } \vec{y}} + \underbrace{([\varphi]_{z+dz} - [\varphi]_z)\vec{z}dydz}_{\text{forces portant sur } \vec{z}}$$



Sur notre volume élémentaire en représentation cartésienne

$$\vec{F}_S = \underbrace{([\varphi]_{x+dx} - [\varphi]_x)\vec{x}dydz}_{\text{forces normales à } \vec{x}} + \underbrace{([\varphi]_{y+dy} - [\varphi]_y)\vec{y}dxdz}_{\text{forces normales à } \vec{y}} + \underbrace{([\varphi]_{z+dz} - [\varphi]_z)\vec{z}dydz}_{\text{forces normales à } \vec{z}}$$

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{bmatrix} (\vec{U}_x, \vec{U}_y, \vec{U}_z)$$

$$\vec{F}_S = \left( \begin{array}{c} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \\ \varphi_{31x+dx} \end{array} - \begin{array}{c} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \\ \varphi_{31x} \end{array} \right) dydz + \left( \begin{array}{c} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \\ \varphi_{32y+dy} \end{array} - \begin{array}{c} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \\ \varphi_{32y} \end{array} \right) dxdz + \left( \begin{array}{c} \varphi_{13} \\ \varphi_{23} \\ \varphi_{33z+dz} \end{array} - \begin{array}{c} \varphi_{13} \\ \varphi_{23} \\ \varphi_{33z} \end{array} \right) dydx$$



$$\vec{F}_S = \left( \begin{array}{c} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \\ \varphi_{31_{x+dx}} \end{array} - \begin{array}{c} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \\ \varphi_{31_x} \end{array} \right) dydz + \left( \begin{array}{c} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \\ \varphi_{32_{y+dy}} \end{array} - \begin{array}{c} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \\ \varphi_{32_y} \end{array} \right) dx dz + \left( \begin{array}{c} \varphi_{13} \\ \varphi_{23} \\ \varphi_{33_{z+dz}} \end{array} - \begin{array}{c} \varphi_{13} \\ \varphi_{23} \\ \varphi_{33_z} \end{array} \right) dy dx$$

$$\vec{F}_S = \begin{array}{c} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial x} \end{array} \underbrace{dx dy dz}_{dV} + \begin{array}{c} \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_{32}}{\partial y} \end{array} \underbrace{dx dy dz}_{dV} + \begin{array}{c} \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_{33}}{\partial z} \end{array} \underbrace{dx dy dz}_{dV}$$

$$\vec{F}_S = \begin{array}{c} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_{13}}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_{33}}{\partial z} \end{array} dV$$

$$\vec{F}_S = \begin{array}{c} \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \varphi_{3k}}{\partial x_k} \end{array} dV$$



$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}$$

$$\rho \underbrace{\begin{pmatrix} f_{vx} \\ f_{vy} \\ f_{vz} \end{pmatrix}}_{\vec{F}_v} dV + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \varphi_{3k}}{\partial x_k} \end{pmatrix}}_{\vec{F}_s} dV = \rho \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{dU_x}{dt} \\ \frac{dU_y}{dt} \\ \frac{dU_z}{dt} \end{pmatrix}}_{m\vec{a}} dV$$

En reprenant l'expression générale du tenseur des contraintes pour un fluide incompressible :

$$\varphi_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad \longrightarrow \quad \vec{F}_s = \begin{bmatrix} -P & \mu \frac{\partial U_x}{\partial y} & \mu \frac{\partial U_x}{\partial z} \\ \mu \frac{\partial U_y}{\partial x} & -P & \mu \frac{\partial U_y}{\partial z} \\ \mu \frac{\partial U_z}{\partial x} & \mu \frac{\partial U_z}{\partial y} & -P \end{bmatrix} \vec{n} dS$$



$$\varphi_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{\partial P \delta_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\partial \left( \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right)}{\partial x_k} + \frac{\partial \left( \mu \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right)}{\partial x_k}$$

$$\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} + \mu \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_k \partial x_i}$$

$$\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} + \mu \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_i \partial x_k}$$



$$\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} + \mu \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_i \partial x_k}$$

$$\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right)$$

pour un fluide incompressible

$$\frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \underbrace{\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2}}_{\text{Laplacien}}$$

Laplacien



$$\underbrace{\rho \begin{pmatrix} f_{vx} \\ f_{vy} \\ f_{vz} \end{pmatrix} dV}_{\vec{F}_v} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_k^2} \\ -\frac{\partial P}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_k^2} \\ -\frac{\partial P}{\partial x_3} + \mu \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_k^2} \end{pmatrix} dV}_{\vec{F}_s} = \rho \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{dU_x}{dt} \\ \frac{dU_y}{dt} \\ \frac{dU_z}{dt} \end{pmatrix} dV}_{m\vec{a}}$$

Ainsi, pour la composante  $i$  de l'égalité vectorielle :

$$\underbrace{\frac{dU_i}{dt}}_{\text{accélération}} = f_{vi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2}$$

*accélération  
particulaire*

# Chapitre 4 : La dynamique des fluides

## 5 Equation de Navier-Stokes



$$\underbrace{\frac{dU_i}{dt}} = f_{vi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2}$$

*accélération  
particulaire*

$$\underbrace{\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} + f_{vi}$$

*accélération  
particulaire*

Equation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible!!

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{F}$$



$$\underbrace{\frac{\partial U_i}{\partial t}}_1 + \underbrace{U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}_2 = \underbrace{f_{vi}}_3 - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}}_4 + \underbrace{\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2}}_5$$

On estime l'ordre de grandeur de chaque terme en faisant apparaître :

$$U_i = \bar{v} \quad \text{Une vitesse moyenne}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = f_0 \quad \text{Une fréquence caractéristique}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{1}{L} \quad \text{Une échelle d'espace caractéristique}$$

$$\partial P = P - P_0 \quad \text{Une fluctuation de pression caractéristique}$$

$$f_{vi} = -g \quad \text{Une force de volume caractéristique}$$

- 1 : accélération instationnaire
- 2 : accélération convective
- 3 : accélération de la pesanteur
- 4 : fluctuations de pression
- 5 : terme lié aux forces visqueuses



$$U_i = \bar{v}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = f_0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{1}{L}$$

$$\partial P = P - P_0$$

$$f_{vi} = -g$$

$$\underbrace{\frac{\partial U_i}{\partial t}}_1 + \underbrace{U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}_2 = \underbrace{f_{vi}}_3 - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}}_4 + \underbrace{\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2}}_5$$

$$\underbrace{\bar{v} f_0}_1 + \underbrace{\frac{\bar{v}^2}{L}}_2 = \underbrace{-g}_3 - \underbrace{\frac{P - P_0}{\rho L}}_4 + \underbrace{\frac{\mu \bar{v}}{\rho L^2}}_5$$

On compare chaque terme à la grandeur caractéristique de l'accélération convective (terme 2) liée au mouvement inertiel du fluide :

$$\underbrace{\frac{L f_0}{\bar{v}}}_1 + \underbrace{1}_2 = \underbrace{-\frac{L g}{\bar{v}^2}}_3 - \underbrace{\frac{P - P_0}{\rho \bar{v}^2}}_4 + \underbrace{\frac{\mu}{\rho L \bar{v}}}_5$$



- 1 : accélération instationnaire
- 2 : accélération convective
- 3 : accélération de la pesanteur
- 4 : fluctuations de pression
- 5 : terme lié aux forces visqueuses

St Nombre de Strouhal

Eu/2 (double du nombre  
d'Euler)

$$\underbrace{\frac{Lf_0}{\bar{v}}}_1 + \underbrace{1}_2 = -\underbrace{\frac{Lg}{\bar{v}^2}}_3 - \underbrace{\frac{P - P_0}{\rho \bar{v}^2}}_4 + \underbrace{\frac{\mu}{\rho L \bar{v}}}_5$$

1/F<sub>r</sub> (inverse du nombre de Froude)

1/R<sub>e</sub> (inverse du nombre  
de Reynolds)



- 1 : accélération instationnaire
- 2 : accélération convective
- 3 : accélération de la pesanteur
- 4 : fluctuations de pression
- 5 : terme lié aux forces visqueuses

$$S_t + \underbrace{1}_2 = \underbrace{-\frac{1}{Fr}}_3 - \underbrace{\frac{E_u}{2}}_4 + \underbrace{\frac{1}{Re}}_5$$

$$S_t = \frac{Lf_0}{v} \quad F_r = \frac{v^{-2}}{Lg} \quad E_u = \frac{P - P_0}{\rho v^2} \quad R_e = \frac{\rho L \bar{v}}{\mu}$$

Si  $S_t \ll 1$ , alors les termes instationnaires sont négligeables,

Si  $F_r \gg 1$ , alors les forces de pesanteur sont négligeables devant les forces d'inertie,

Si  $E_u \ll 1$ , le travail dû aux fluctuations de pression est négligeable devant l'énergie cinétique du fluide,

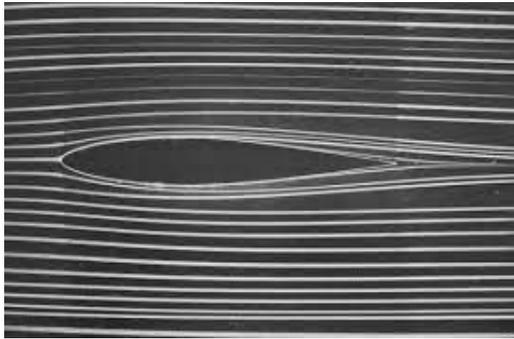
Si  $R_e \gg 1$ , les forces d'inerties prédominent sur les forces visqueuses,

l'énergie des tourbillons n'est plus dissipée par les forces visqueuses,

l'écoulement devient **Turbulent** !! Alors que  $Re \ll 1$ : écoulement **Laminaire**.



$$R_e = \frac{\rho L \bar{v}}{\mu}$$



Si  $R_e \gg 1$ , les forces d'inertie prédominent sur les forces visqueuses, l'énergie des tourbillons n'est plus dissipée par les forces visqueuses, l'écoulement devient **Turbulent** !! Alors que  $Re \ll 1$ : écoulement **Laminaire**.

# FIN

[https://www.youtube.com/results?search\\_query=coria+cf](https://www.youtube.com/results?search_query=coria+cf)

*Bonne chance pour la suite ...*