INSA de Rouen
STPI2 / Semestre 4

Travaux dirigés de l'EC P8-1
Initiation au transfert thermique

Diane Duval (diane.duval@insa-rouen.fr)
Samuel Paillat (samuel.paillat@insa-rouen.fr)
Jérôme Thibaut (jerome.thibaut@insa-rouen.fr)
Jérôme Yon (jerome.yon@insa-rouen.fr)

2024

Exercice 1. Profil thermique dans un mur à l'équilibre thermique

Soit un mur d'habitation de grandes dimensions (surface S) par rapport à son épaisseur e. La température de ce mur côté intérieur de l'habitation est notée T_1 et celle côté extérieur est notée T_2. On fera l'hypothèse que le profil de température au sein de ce mur est affine.

1. Exprimer $T(x)$. En déduire l'expression du gradient de température au sein du mur ?

2. En déduire l'expression de la densité de flux au sein du mur. Analyser le vecteur obtenu.

3. En déduire le flux thermique traversant le mur (puissance thermique dissipée).

4. En prenant une analogie avec l'électricité (flux thermique = courant, différence de température = différence de potentiels), proposer une expression de la résistance thermique du mur. Évaluer numériquement cette résistance sans oublier son unité.

5. Que faut-il faire pour réduire la déperdition thermique ?

La déperdition thermique se dissipe à l'extérieur de la maison par convection naturelle et par rayonnement. La température de l'air à l'extérieur est T_{ext} et le coefficient de convection h. On notera ε l'émissivité du mur et on fera l'hypothèse que l'environnement extérieur rayonne avec une émissivité de *1*.

6. Donner l'expression du flux convectif et du flux net échangé par rayonnement.

7. En déduire la valeur du coefficient de convection h ?

$$\boldsymbol{S = 6\ m^2, e = 10\ cm, k_{tr} = 1.28\ W.m^{-1}.K^{-1}, T_1 = 22°C, T_2 = 5°C,}$$
$$\boldsymbol{\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ SI, T_{ext} = 0°C, \epsilon = 0.92}$$

Exercice 2. Simple ou double vitrage ?

Le premier dispositif est constitué d'une fenêtre en verre de surface S et d'épaisseur e. Le second dispositif est constitué de deux lames de verre d'épaisseur $e/2$ séparées par une lame d'air d'épaisseur e'. Dans les deux cas, de part et d'autre des deux dispositifs, un équilibre thermique est atteint avec, à l'intérieur de la maison une température T_1 supérieure à la température T_2 de l'air extérieur.

1. Déterminer le profil de température à l'intérieur de la lame de verre dans le premier dispositif. Calculer la puissance thermique $\boldsymbol{P_1}$ perdue par la fenêtre à chaque instant.

2. Faire de même dans le cas du second dispositif, on notera P_2 la nouvelle puissance thermique.

3. Faire le schéma équivalent électrique faisant apparaitre 3 résistances thermiques.

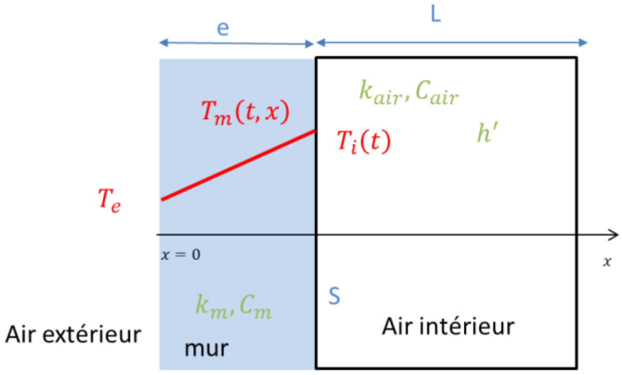
4. Calculer l'efficacité du système double vitré par rapport au simple vitrage en faisant le rapport P_1/P_2. Pour l'application numérique on prendra $e=e'$.

5. Quel est le gain du même dispositif double vitré si l'on remplace l'air par l'argon ?

$$\boldsymbol{k_v = 1\ Wm^{-1}K^{-1} \text{ et } k_{air}=2.6\ 10^{-2}\ Wm^{-1}K^{-1},\ k_{argon}=1.77\ 10^{-2}\ Wm^{-1}K^{-1}}$$

Exercice 3. Profil thermique dans un mur à l'équilibre thermique

Considérons un mur en béton d'épaisseur e et de surface S donnant sur une pièce close de longueur L. On néglige les déperditions thermiques par les autres parois de la pièce que celle formée par le mur. La température extérieure est notée T_e, celle dans le mur (de conductivité thermique k_m et de capacité thermique C_m) T_m et celle de l'air dans la pièce (k_{air}, C_{air}) T_i. Il y a une source de chaleur thermique au sein de la pièce dont la puissance est notée P (W).



1. **Cas stationnaire** : Faire un bilan thermique au sein du mur et dans l'air afin d'en déduire la température d'équilibre de l'air. On fera l'hypothèse que les températures du mur sur les bords extérieurs et intérieurs sont respectivement T_e et T_i.
2. Reprendre le calcul en considérant maintenant les effets convectifs se produisant à l'intérieur et à l'extérieur de l'habitation. On mettra ainsi en évidence des résistances thermiques convectives et conductive (on néglige le rayonnement).
3. Faire le rapport des déperditions thermiques avec prise en compte de la convection et sans. En déduire le rôle joué par les lames d'air convectives le long des parois.

4. **Cas instationnaire** : Faire un bilan thermique afin de déterminer une équation différentielle de la température au sein de la pièce. On fera l'hypothèse que la variation de température au sein du mur est suffisamment lente pour que le profil thermique dans le mur soit toujours affine afin de justifier l'emploi des résistances thermiques (approche quasi-stationnaire).
5. Considérons maintenant le comportement thermique dans la pièce si on stoppe l'apport thermique. On prendra pour origine des temps $t=0$, l'instant correspondant à l'obtention d'une température de confort intérieur supérieure $T_{c,sup}$ $=21°C$. Résoudre l'équation

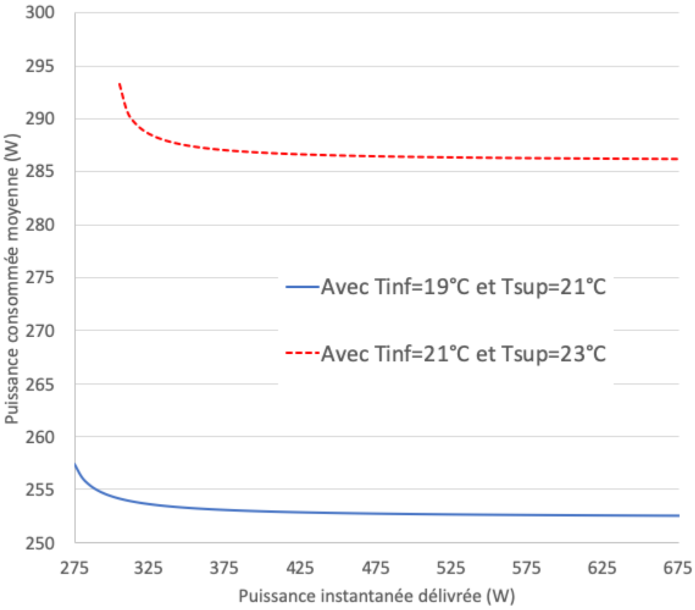
différentielle afin de déterminer une expression analytique de la diminution de la température de l'air dans la pièce en fonction du temps.

6. En déduire au bout de combien de temps Δt_d atteint-on une température de confort inférieure définie à $T_{c,inf} = 19°C$?

7. Une fois cette température atteinte, le thermostat se déclenche et l'apport thermique reprend. Reprendre les questions précédentes afin de déterminer le temps Δt_c nécessaire pour que la température atteigne de nouveau la température de confort supérieure $T_{c,sup}$.

8. Ainsi, le cycle de chauffage complet dure $\Delta t_c + \Delta t_d$ mais le temps pour lequel le chauffage est activé correspond uniquement Δt_c. Exprimer la puissance moyenne de consommation en fonction de $T_e, T_{c,inf}, T_{c,sup}, P\ et\ R$ ainsi que sa valeur numérique pour les données du problème.

9. La formule précédente est utilisée pour tracer les courbes ci-dessous. Commenter.



$$\boldsymbol{P = 300W, T_e = 5°C, k_m = 1.28\ W.m^{-1}.K^{-1}, S = 6m^2,\ L = 5\ m, h_{int} = h_{ext} = 10\ W.m^{-2}.K^{-1}, e = 20\ cm, C_{air} = 1256\ J.K^{-1}.m^{-3}, T_{sup} = 21°C,\ T_{inf} = 19°C.}$$

TD N°3

Exercice 4. Problème thermiquement mince

On place une boule de cuivre de rayon R à température ambiante T_0 dans un four à température T_f. Il y a un écoulement ventilé dans le four augmentant les échanges convectifs. On veut étudier l'évolution temporelle de la température au sein de cette boule.

1. Le nombre de Biot représentatif de la boule se calcule comme $B_i = \frac{hR}{k_{tr}}$. Que vaut-il dans notre problème. Qu'en conclure ?

2. Faire un bilan thermique et en déduire l'évolution temporelle de la température au sein de la boule de cuivre.

3. On dispose d'un thermocouple (sonde de température) qui reporte en fonction du temps la température au cœur de la boule. Ce dispositif a une précision de mesure de 5°C. Au bout de combien de temps observera-t-on l'obtention d'une température plateau ?

$$\boldsymbol{R = 20\ cm, h = 100\ W.m^{-2}.K^{-1}, C = 382\ J.kg^{-1}.K^{-1},}$$
$$\boldsymbol{\rho = 8930\ kg.m^{-3}, k_{tr} = 400\ W.m^{-1}.K^{-1}, T_0 = 20°C, T_f = 200°C}$$

Exercice 5. Nombres adimensionnels

Dans l'exercice 3, nous avons considéré un profil de température affine au sein du mur à tout instant. Le but de cet exercice et d'étudier la validité de cette hypothèse…

L'équation de la chaleur (sans source), s'écrit $\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T$ avec $D = \frac{k_{tr}}{\rho C}$ ($\mathrm{m}^2 s^{-1}$) la diffusivité thermique du matériau.

1. En quoi consiste exactement l'hypothèse de quasi-stationnarité faite dans l'exercice 3 ? Qu'est-ce qui permet d'envisager cette hypothèse valable ?

2. Une fois exprimée sous forme adimensionnelle, l'équation de la chaleur s'écrit : $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \frac{Dt_c}{e^2}\Delta\tilde{T}$. Que représente le nombre de Fourier $F_o = \frac{Dt_c}{e^2}$? Que vaut-il dans notre problème, qu'en conclure ?

3. Quelles propriétés du mur dans l'exercice 3 auraient permis de rendre sa résolution valide ?

$$\boldsymbol{D_{béton} = 0.54 \times 10^{-6}\ m^2.s^{-1}}$$

Exercice 6. Faut-il isoler sa maison par l'intérieur ou par l'extérieur ?

Lorsque le problème peut être traité de façon stationnaire, l'analogie électrique peut être utilisée en considérant autant de résistances de conduction $R_c = \frac{e}{Sk_{th}}$ et d'échanges convecto-radiatifs $R_{C-R} = \frac{1}{S(h+4\sigma T_\infty^3)}$ que nécessaires.

1. Faire le schéma équivalent pour un mur de béton de surface S et d'épaisseur e_b recouvert de plaque de plâtre (e_p) puis de laine de verre (e_v) à l'intérieur de l'habitat. En déduire la résistance thermique équivalente puis la puissance thermique perdue par ce mur.
2. Par quel facteur a-t-on diminué cette déperdition par rapport au mur de béton seul.
3. Reprendre le problème dans le cas d'une isolation par l'extérieur. Conclure.
4. Évaluer la température du mur côté intérieur (plâtre dans le cas de l'isolation par l'intérieur, béton dans le cas de l'isolation par l'extérieur et dans le cas sans isolation). Conclure.
5. Que dire de l'hypothèse de stationnarité.

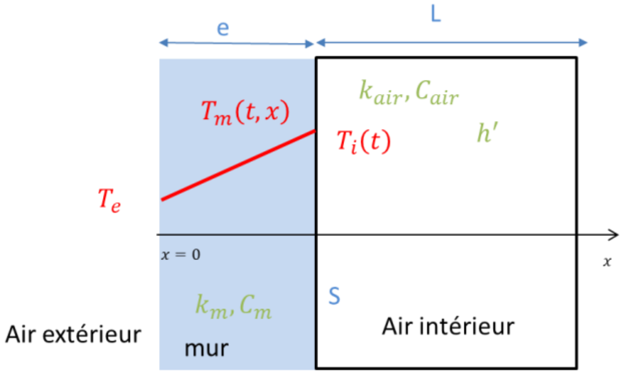
$$\boldsymbol{e_b = 22\ cm, e_p = 1.3\ cm, e_v = 10\ cm, S = 4\ m^2, h_{int} = 7.7\ W.m^{-2}.K^{-1}, h_{ext} = 25\ W.m^{-2}.K^{-1}, k_b = 2\ W.m^{-1}.K^{-1}, k_p = 0.25\ W.m^{-1}.K^{-1}, k_v = 0.032\ W.m^{-1}.K^{-1}, T_{int} = 20°C, T_{ext} = 5°C, \sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ SI.}$$

TD Numérique N°5

Exercice 7. Profil thermique dans un mur : simulation en régime instationnaire

On reprend le problème de l'exercice 3 : Un mur en béton d'épaisseur e et de surface S donnant sur une pièce close de longueur L. La température extérieure est notée T_e, celle dans le mur (de conductivité thermique k_m et de capacité thermique C_m) $T_m(x)$ et celle de l'air dans la pièce (k_{air},

C_{air}) T_i. Il y a une source de chaleur thermique au sein de la pièce dont la puissance est notée P (W).



On a montré en cours que l'équation de la chaleur (1D) pouvait se résoudre numériquement en itérant le calcul suivant sur la variable temporelle j dont le pas d'avancement est Δt :

$$\overrightarrow{T_{m,J+1}} = \overrightarrow{T_{m,J}} + \frac{\Delta t}{\rho C}\vec{P} + \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}[M]\overrightarrow{T_{m,J}}$$

Avec $\overrightarrow{T_J}$ un vecteur représentant la température dans le mur après une discrétisation spatiale de celui-ci (pas Δx), $\vec{P}$ un vecteur contenant les sources d'énergie thermique s'il y en a et $[M]$ une matrice carrée :

$$[M] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & 1 & \dots & & & \\ & & & & & \dots & 1 & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

1. Télécharger sur moodle le fichier « Mur insta Q1.sce » à exécuter en tapant F5 une fois chargé dans le logiciel scilab. Commenter le script avec l'enseignant. Cette simulation consiste à observer la transition vers un état stationnaire. Modifier le script afin d'observer l'évolution du profil de température dans le mur lorsque la température intérieure du mur oscille de la façon suivante : $T_m^{int} = \overline{T^{int}} + A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ avec A l'amplitude des oscillations et T leur période. Qu'observe-t-on ? Pouvait-on s'y attendre ? Est-ce que cela remet en cause les conclusions de l'exercice 3 ? Que pouvez-vous dire des déperditions thermiques associées à cette simulation ?
2. En fait, l'évolution des températures des bords intérieures et extérieures du mur sont dictées par les échanges thermiques se produisant entre le mur et l'air dans la pièce.

Exprimer la continuité du flux thermique aux interfaces, on négligera les échanges radiatifs.

3. On rappelle que la décomposition de Taylor spatiale donne

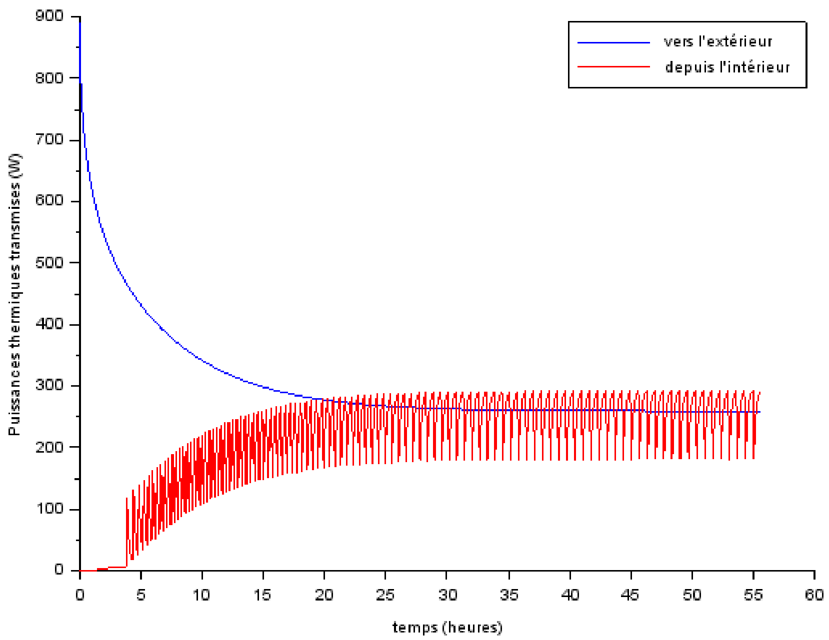
$$f(x + \Delta x, t) = f(x,t) + \Delta x \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$$

En déduire l'expression des conditions limites à injecter dans le script si on souhaite tenir compte des échanges convectifs avec l'air intérieur et extérieur. Ajouter cela dans le script. On considérera que les oscillations de températures considérées précédemment sont maintenant celles de l'air : $T_i(t) = \overline{T^{int}} + Acos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$. Faites varier le coefficient de convection. Conclure.

4. Nous cherchons maintenant à améliorer cette simulation en modélisant l'évolution de la température de l'air dans la pièce. Pour ce faire, on applique un bilan thermique dans l'air (prod=Ech.+Stock), ce qui donne $P(t) = \phi(t) + C_{air}\frac{dT_i}{dt}SL$ avec P la puissance thermique délivrée par le radiateur, ϕ le flux thermique transmis dans le mur, C_{air} la capacité thermique de l'air. On rappelle encore le principe de discrétisation cette fois ci temporelle : $f(x, t + \Delta t) = f(x,t) + \Delta t \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$. En déduire l'expression du calcul de la température de l'air intérieure de la forme $T_{i,j+1} = T_{i,j} + ???$

5. Modifier le script en conséquence. On activera la source thermique dans la pièce selon une loi d'hystérésis représentative du fonctionnement du thermostat (bornée par les températures $T_{c,inf} = 19°C$ et $T_{c,sup} = 21°C$).

6. La figure ci-dessous est issue de cette simulation et reporte en fonction du temps les déperditions thermiques conductives relevées dans le mur au niveau de l'interface intérieure (rouge) et extérieure (bleue). Commenter cette courbe. Que dire de l'application de la formule obtenue l'exercice 3 (question 8) qui donne (avec les données de ce problème) une puissance moyenne de 252 W ?



$$\boldsymbol{P = 300\,W, T_e = 5°C, k_m = 1.28\,W.m^{-1}.K^{-1},\ \rho = 2400\,kg.m^{-3}, C_p = 880\,J.kg^{-1}.K^{-1}, S = 6m^2,\ L = 5\,m, h_{int} = h_{ext} = 10\,W.m^{-2}.K^{-1}, e = 20\,cm, C_{air} = 1256\,J.K.m^{-3}, T_{sup} = 21°C,\ T_{inf} = 19°C.}$$

Exercice 8. **Pour aller plus loin (travail facultatif noté)**

Il vous est proposé de compléter l'exercice 8 en réalisant un travail personnel (ou en groupe limité à 4 personnes) dont l'évaluation participera à la note de l'EC. Vous avez la liberté de modifier les conditions limites, d'étudier la réponse thermique à des sollicitation périodiques ou encore de voir l'impact du choix des matériaux, l'effet de l'ajout d'un isolant intérieur ou extérieur… Ce travail doit être remis avant le démarrage de la partie mécanique des fluides.

TD N°6

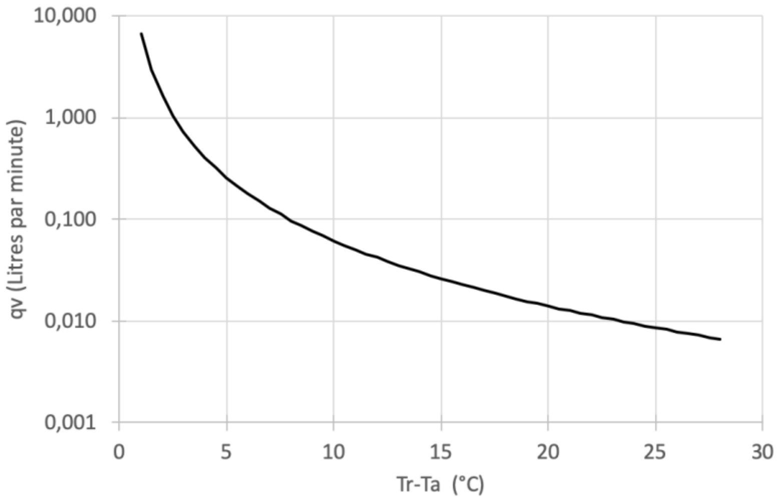
Exercice 9. **Un ingénieux dispositif de mesure !**

On place un élément résistif (résistance électrique R, de surface S et de température T_r) dans un tube de rayon r dans lequel s'écoule de l'air (température T_a) à la vitesse V. Le tube est également à la température T_a. Un courant électrique I (maintenu constant) parcourt cette résistance. En fonction du débit d'écoulement d'air dans le tube, la température de l'élément résistif évolue. La mesure de T_r et de T_a est assurée par deux thermocouples.

1. Faire un bilan thermique sur l'élément résistif à l'état stationnaire. On considérera les échanges convectifs ainsi que par rayonnement entre ce système et le tubage (l'ensemble avec une émissivité de 1).
2. Linéarisez le terme de rayonnement afin d'exprimer le courant de la forme $I^2 = (T_r - T_a) f(h, T_a, R)$. Que faut-il respecter pour que ce résultat soit valide ?
3. La vitesse de l'écoulement modifie le coefficient de convection h par une formule du type $h = A \times k_{tr,air} \times \sqrt{\frac{V}{rD_{air}}}$ avec A un coefficient, $k_{tr,air}$ la conductivité thermique de l'air

et D_{air} sa diffusivité thermique. Exprimer le débit volumique parcourant le tube ($q_v = V\pi r^2$ en $\frac{m^3}{s}$) en fonction des données du problème et des températures T_r et T_a.

4. Voici une illustration de la relation théorique liant le débit volumique de l'écoulement à la différence des températures mesurées, pour une circulation d'air, un courant de 300 mA, et R=5 Ω. Commenter.



Exercice 10. **Chauffage Laser**

Soit un laser CO2 fonctionnant dans l'infrarouge (*10,6 µm*), relativement divergent, délivrant une puissance radiative de *P=200 W*. On place une petite pièce de cinq centimes d'euros (diamètre $d = 21{,}25\,mm$) considérée parfaitement absorbante (corps noir) à une distance suffisante de la source pour qu'elle soit entièrement exposée au flux lumineux.

1. Évaluer l'éclairement (en W/m^2) perçu par la pièce. Faire l'application numérique.

2. En faisant un bilan thermique, dire quelle est la température de la pièce absorbante à l'équilibre thermique. Vous exprimerez le résultat analytique puis en ferez l'application numérique :

2.a Si les échanges sont purement radiatifs avec un fond diffusant à $T_0=300K$?

2.b Si l'on considère également des échanges convectifs ($h=50\ W/K/m^2$) ? On pourra, si nécessaire utiliser la linéarisation $(T_a^4 - T_b^4) \approx (T_a - T_b)4\,T_b^3$ en discutant de la validité de cette simplification.

3. Calculer la longueur d'onde du rayonnement maximal de la pièce dans le cas sans convection (question 2.a), dire si elle est incandescente.

TD N°7

Exercice 11. **Expérience d'effet de Serre**

On s'intéresse à la température *T* d'un matériaux absorbant (corps noir) positionné au fond d'un cylindre de rayon *R* et de hauteur *h* (avec *R<<h*). Il y a une lame de verre sur la partie supérieure qui permet au cylindre d'être hermétique (il sera rempli de CO2). On positionne juste au-dessus de la lame de verre une source lumineuse de même section qui produit un éclairement dont le

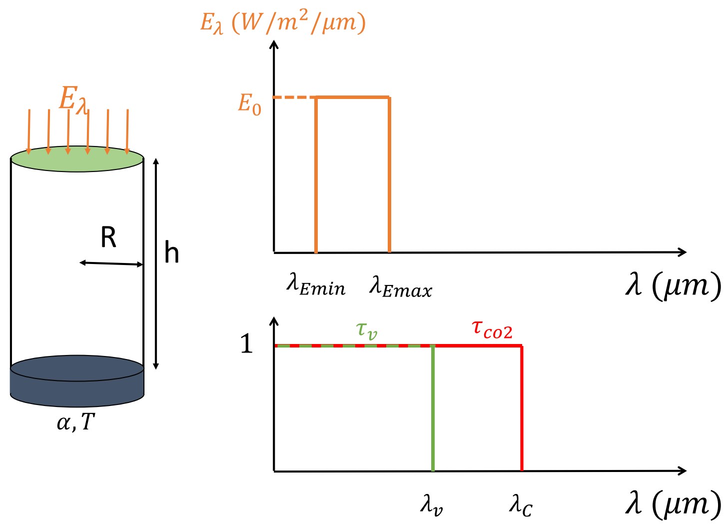
spectre est donné dans la figure ci-contre. On considérera les transmissivités spectrales simplifiées du verre ainsi que celles du CO_2 pur telles que reportées dans la même figure.

Les bords intérieurs du cylindre sont considérés parfaitement réfléchissants et adiabatiques.

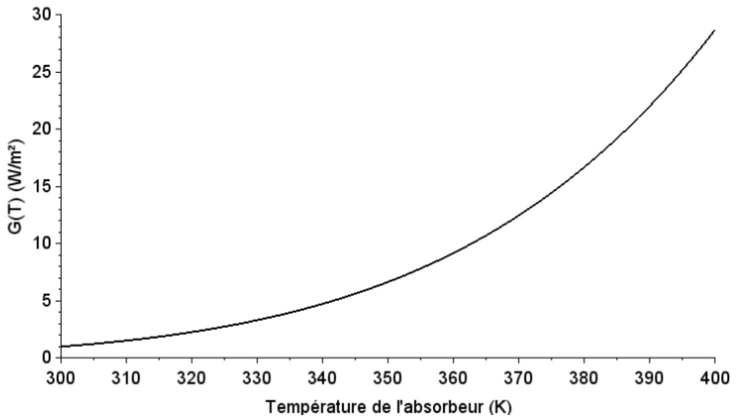
1. Quel est la puissance radiative reçue en provenance de la lampe. Faire l'application numérique.
2. Quel est la puissance au sortir de la lame de verre ?
3. Puis arrivant jusqu'à l'absorbeur ?
4. En déduire la puissance radiative en provenance de la source lumineuse absorbée par l'absorbeur.
5. Quelle est l'expression du flux rayonné par l'absorbeur porté à température T ?
6. Quelle est la part de cette émission qui parvient jusqu'à la lame de verre ?
7. Que devient la part de l'émission du corps noir qui n'est pas transmise par le CO_2 ?
8. Sachant que tout ce qui n'est pas transmis par le verre est réfléchi, dire la part du flux émanant du sol et qui parvient jusqu'au verre qui atteindra de nouveau le sol par réflexion ?
9. Aux flux absorbés précédemment discutés, on ajoutera un terme ϕ_0 associé à l'absorption du rayonnement ambiant dans lequel baigne l'expérience (l'ensemble de la pièce et des matériaux rayonnent du fait de leur température ambiante T_0). Faire le bilan thermique de l'absorbeur. Vous obtiendrez une égalité qui fera intervenir $T, E_0, \lambda_{Emax}, \lambda_{Emin}, \sigma, M^{\circ}_{\lambda,T}, \phi_0, S$ et λ_C.
10. On définit la fraction d'exitance d'un corps comme étant la part de l'énergie rayonnée par un corps noir jusqu'à la longueur d'onde λ sur celle rayonnée à toutes longueurs d'onde :

$$F(\lambda, T) = \frac{\int_0^{\lambda} M^{\circ}_{\lambda,T} d\lambda}{\int_0^{\infty} M^{\circ}_{\lambda,T} d\lambda} = \frac{\int_0^{\lambda} M^{\circ}_{\lambda,T} d\lambda}{\sigma T^4}$$

Déterminer, dans un premier temps, la densité de flux de rayonnement absorbée $\frac{\phi_0}{S}$ puis, dans un second temps, la température de l'absorbeur. Pour vous aider, on reporte ci-

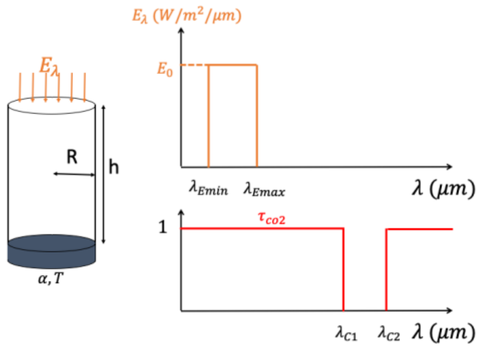


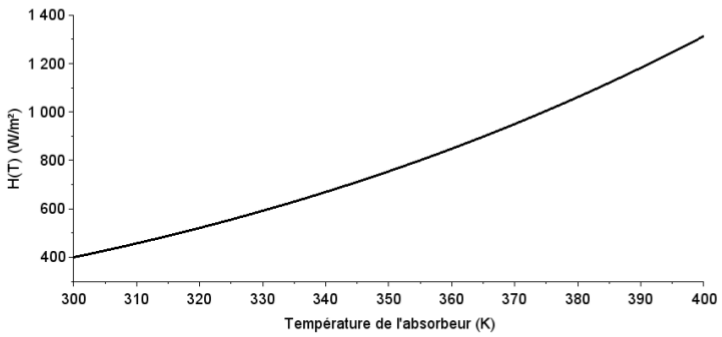
dessous la fonction $G(T)$ définie comme $G(T) = \sigma T^4 F(\lambda_v, T)$ dont vous chercherez à donner le sens physique. Vous discuterez de la validité du résultat obtenu.



11. En réalité, la bande d'absorption du CO2 est bornée entre $\lambda_{C1} = 14\ \mu m$ et $\lambda_{C2} = 17\ \mu m$. Est-ce que le résultat sera changé si l'on considère λ_{C2}? De même si l'on modifie la concentration en CO2 dans le cylindre ?

12. Que devient le bilan thermique en l'absence de la lame de verre (on supposera le tube toujours rempli de CO2). Quelle devra être la puissance de la lampe pour que l'absorbeur atteigne la même température que dans la question 10 ? Pour vous permettre la résolution numérique, voici la courbe $H(T) = \sigma T^4\big(1 + F(\lambda_{C1}, T) - F(\lambda_{C2}, T)\big)$:





$$\boldsymbol{E = 50\,W/m^2/\mu m,\ \lambda_{Emin} = 0.4\ \mu m, \lambda_{Emax} = 0.8\ \mu m, \lambda_v = 4\ \mu m,}$$
$$\boldsymbol{\lambda_C = \lambda_{C1} = 14\ \mu m, \lambda_{C2} = 17\ \mu m, R = 20cm,}$$
$$\boldsymbol{\sigma = 5.67\ 10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}, T_0 = 300\ K}$$