NOM : .... Prénom : .... Groupe : .....

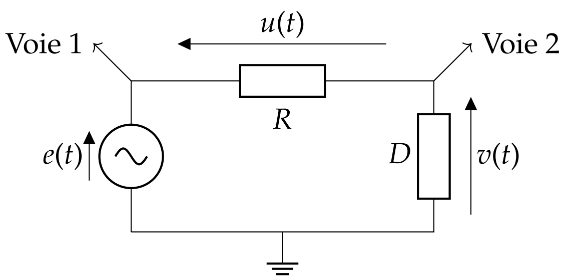
D.S. de P3 du jeudi 18 janvier 2024
Durée : 1h30

INSCRIRE SON NOM, PRENOM, GROUPE EN HAUT DE CHAQUE FEUILLE
Une calculatrice non programmable, non graphique est autorisée.
Pour les élèves internationaux, les dictionnaires en papier non-annotés sont autorisés.
Les téléphones portables et montres doivent être éteints et rangés dans les sacs.

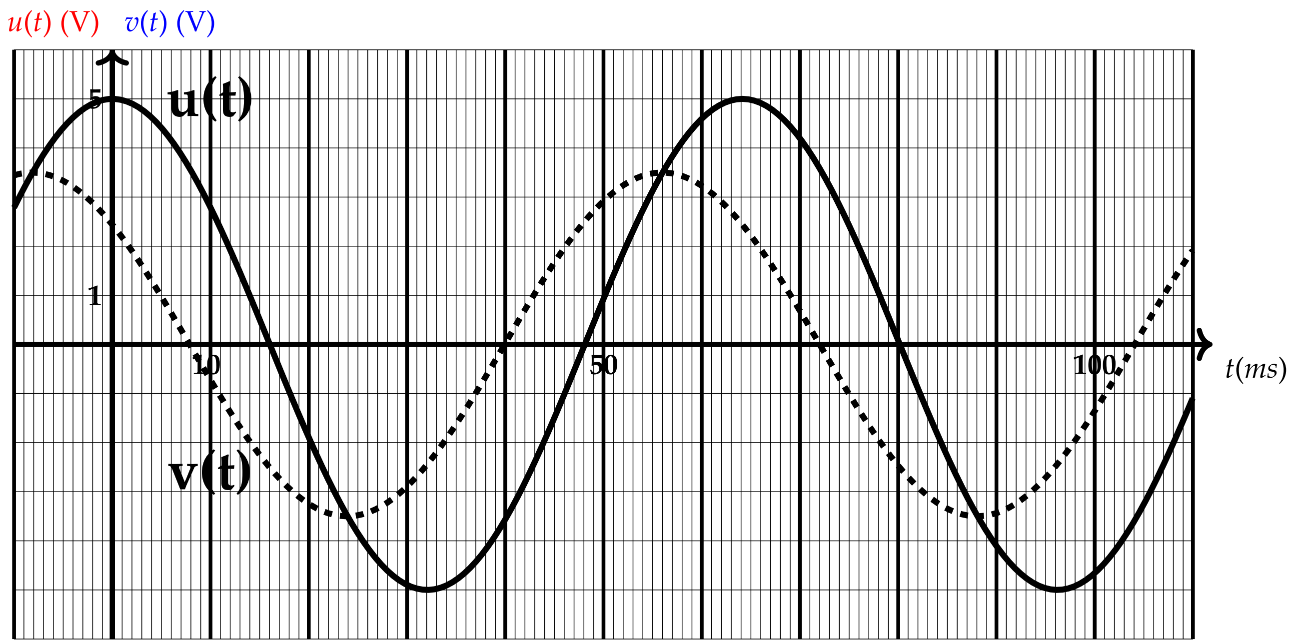
TOUTE APPLICATION NUMERIQUE EST PRECEDEE D'UN CALCUL LITTERAL
ET COMPORTE UNE UNITE.

Exercice 1 : Impédance d'un dipôle inconnu

On réalise le circuit suivant avec un dipôle D inconnu et une résistance $R = 100\,\Omega$. L'objectif de l'exercice est de trouver l'impédance complexe $\underline{Z}_D$ de ce dipôle.



On obtient les mesures suivantes avec un oscilloscope à deux voies. La tension $u(t)$ est représentée en trait plein et la tension $v(t)$ en trait pointillé.



Le générateur fournit une tension sinusoïdale $e(t) = E_{max}\cos(\omega t)$. On peut écrire les deux autres tensions sous la forme $u(t) = U_{max}\cos(\omega t + \phi_u)$ et $v(t) = V_{max}\cos(\omega t + \phi_v)$.

1) Donner l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z}_D$ en fonction de $\underline{u}$, $\underline{v}$ et R.

On a les relations suivantes : $\underline{u} = R\,\underline{i}$ et $\underline{v} = \underline{Z}_D\,\underline{i}$.

On en déduit : $\underline{Z}_D = \dfrac{R\,\underline{v}}{\underline{u}}$.

2) Donner les expressions de $|\underline{Z}_D|$ et $Arg(\underline{Z}_D)$ en fonction des paramètres des signaux $u(t)$ et $v(t)$ et de R.

$|\underline{Z}_D| = \dfrac{R\,V_{max}}{U_{max}}$.

$Arg(\underline{Z}_D) = \phi_v - \phi_u$.

3) Quelle tension est en avance ? Déterminer graphiquement la valeur du déphasage $\varphi = \phi_v - \phi_u$

La tension $v(t)$ est en avance sur la tension $u(t)$. On a donc $\varphi > 0$.
On mesure la période $T = 64$ ms et le décalage en temps entre les deux courbes $\Delta t = 8$ ms.
On en déduit $|\varphi| = 2\pi\frac{\Delta T}{T} = 2\pi\frac{8}{64} = \frac{\pi}{4}$.

Finalement, $\varphi = +\dfrac{\pi}{4}$.

4) En utilisant les courbes page 1/8, déterminer graphiquement les valeurs de la pulsation ω, de $|\underline{Z}_D|$ et $Arg(\underline{Z}_D)$.

On a mesuré $T = 64$ ms, ce qui donne $\omega = 98$ rad.s^{-1}.
On mesure $U_{max} = 5$ V et $V_{max} = 3,5$ V, ce qui donne $|\underline{Z}_D| = 70\,\Omega$.

Et $Arg(\underline{Z}_D) = \varphi = +\dfrac{\pi}{4}$.

5) On peut écrire l'impédance du dipôle D sous la forme : $\underline{Z}_D = R_D + j\,X_D$. Déterminer les valeurs de R_D et X_D.

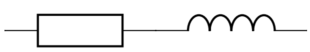
On a $|\underline{Z}_D| = \sqrt{R_D^2 + X_D^2}$ et $\tan Arg(\underline{Z}_D) = \frac{X_D}{R_D}$.
La question précédente donne $\tan Arg(\underline{Z}_D) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$, donc on en déduit $X_D = R_D$.

Fianlement, $|\underline{Z}_D| = \sqrt{2\,R_D^2}$, soit $R_D = \sqrt{\dfrac{|\underline{Z}_D|^2}{2}}$.

On trouve $R_D = X_D = 49\,\Omega$.

6) Proposer un schéma équivalent du dipôle D avec des résistances, condensateurs et bobines. Justifier.

On a une résistance R_D en série avec une bobine ($X_D > 0$).



7) Donner l'expression puis la valeur numérique de la puissance moyenne absorbée par le dipôle D.

On utilise la relation $\mathcal{P}_D = Re(\underline{Z}_D) I_{eff}^2 = R_D\left(\dfrac{I_{max}}{\sqrt{2}}\right) = R_D\dfrac{U_{max}^2}{2\,R^2}$

On trouve $\mathcal{P}_D = 62$ mW.

NOM : .... **Prénom : ....** **Groupe : .....**

Exercice 2 : Signal sinusoïdal à partir d'un signal rectangulaire

Dans cet exercice, on souhaite obtenir une tension sinusoïdale de fréquence 400 Hz. Le signal d'entrée est un signal rectangulaire dont on donne la décomposition de Fourier :

$$e(t) = \frac{4\,V}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left(2\pi\,(2k+1) f\,t\right)}{2k+1}$$

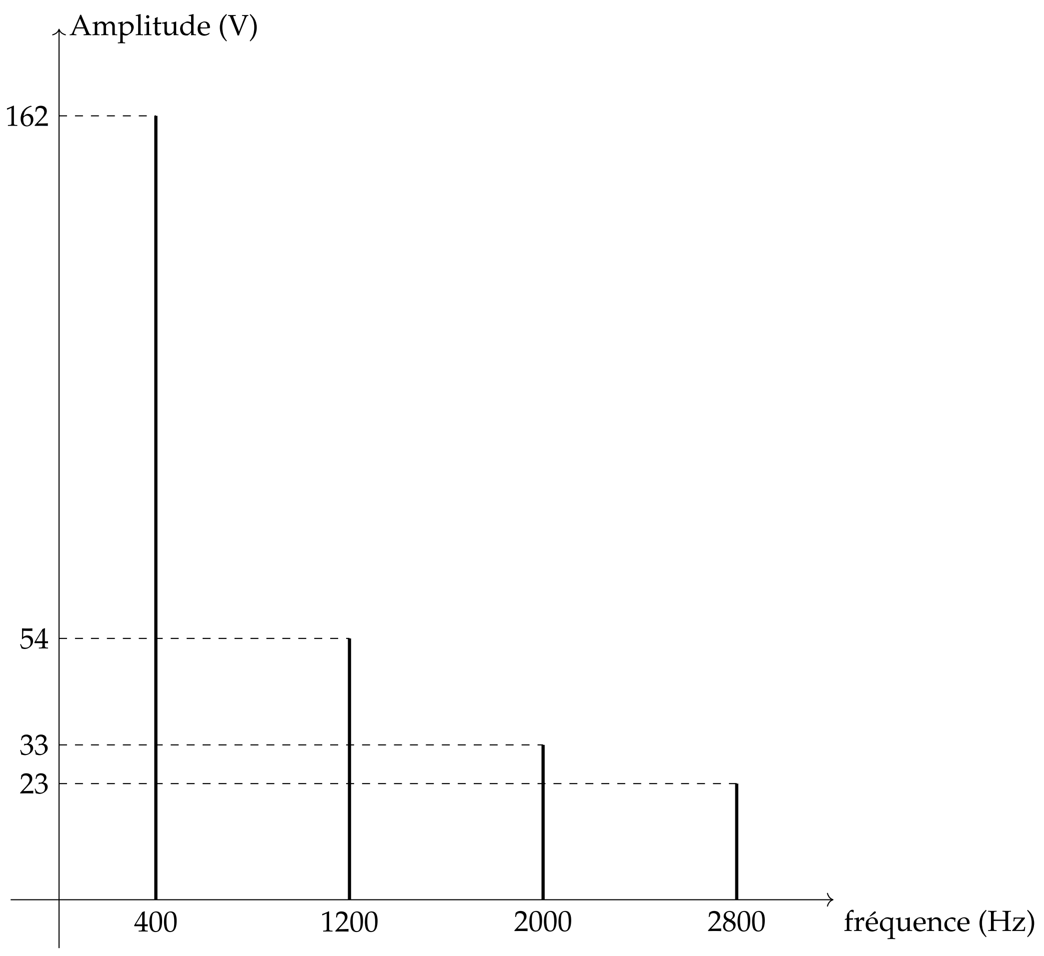
.
On prend $f = 400$ Hz et $V = 128$ V.

Partie 1 : Le signal rectangulaire

1a) Donner l'expression de l'amplitude du fondamental. Calculer sa valeur numérique.

L'amplitude de fondamental s'obtient pour $k = 0$, c'est à dire $\frac{4\,V}{\pi}$.
On trouve $\frac{4\,V}{\pi} = 163$ V

1b) Tracer le spectre de $e(t)$ en montrant les 4 premiers harmoniques non nuls.



Partie 2 : Le filtre

2) On étudie le filtre suivant :
La bobine a une inductance $L = 40$ mH et une résistance interne $r_L = 20\,\Omega$. On prend un condensateur de capacité $C = 4,0\,\mu$F et une résistance $R = 100\,\Omega$.

NOM : .... **Prénom :** .... **Groupe :** .....

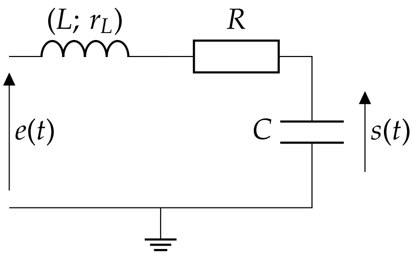
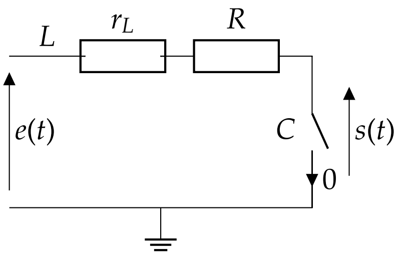


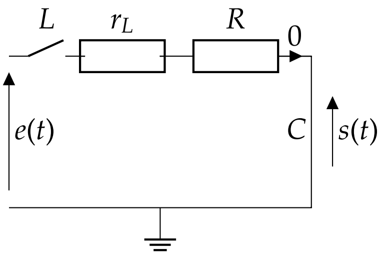
Figure 1

2a) Par une analyse qualitative, donner la nature de ce filtre.

On remplace les bobines et condensateurs par leurs équivalents en basses et hautes fréquences.



En basses fréquences



En hautes fréquences

En basses fréquences, $i = 0$, les tensions aux bornes des résistances sont nulles, ce qui donne $\underline{s} = \underline{e}$ et $\underline{H} = 1$.
En hautes fréquences, $\underline{s} = 0$ (tension aux bornes d'un fil) et donc $\underline{H} = 0$.
On a un filtre passe-bas.

2b) Donner l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ de ce filtre. Préciser l'ordre du filtre.

On écrit un pont diviseur de tension et on obtient :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_{r_L} + \underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + r_L + R + \frac{1}{jC\omega}}$$

.

Finalement, $\underline{H} = \dfrac{1}{1 - LC\omega^2 + j(R + r_L)C\omega}$.

Le dénominateur est un polynôme de degré 2 en $j\omega$, c'est un filtre du deuxième ordre.

2c) A l'aide de l'annexe, déterminer les expressions des paramètres caractéristiques de ce filtre.

La forme canonique d'un filtre passe-bas du deuxième ordre s'écrit : $\underline{H} = \dfrac{A_0}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2}$.

On identifie : $A_0 = 1$.

$x^2 = LC\omega^2$, ce qui donne $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{LC}\omega$, et finalement $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

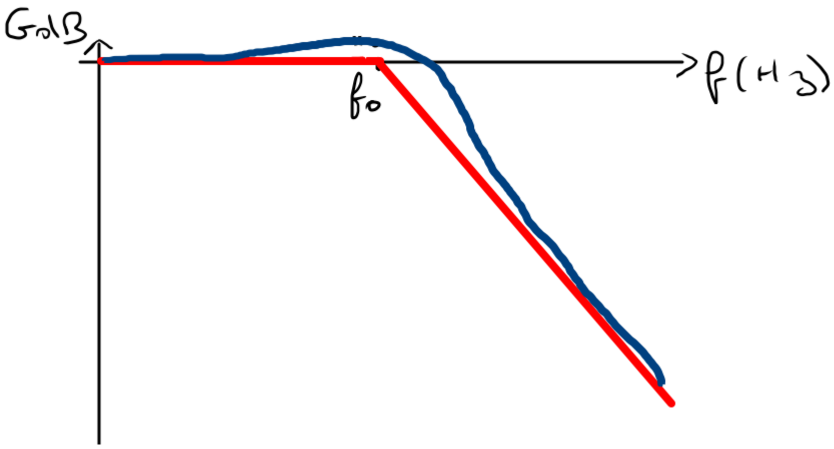
$\frac{x}{Q} = (R + r_L)C\omega$, soit $Q = \frac{x}{(R+r_L)C\omega}$ et finalement $Q = \frac{1}{R+r_L}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

2d) Faire l'étude asymptotique du filtre. On determinera les expressions approchées de $\underline{H}$ quand $x << 1$ et $x >> 1$ puis les pentes des asymptotes du diagramme de Bode en gain.

Quand $x << 1$, on a $\underline{H} \approx \frac{A_0}{1}$.
Donc $G_{dB} = 20\log(A_0) = 0$ dB. L'asymptote est horizontale.
Quand $x >> 1$, on a $\underline{H} \approx \frac{A_0}{-x^2}$.
Donc $G_{dB} = 20\log\left(\frac{A_0}{x^2}\right) = -40\log x$ dB. La pente de l'asymptote est -40 dB/décade.

2e) Calculer les paramètres caractéristiques du filtre. Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain de ce filtre. On fera apparaitre clairement les asymptotes.

Avec les valeurs numériques, on obtient les valeurs suivantes : $\omega_0 = 2500$ rad.s^{-1} (ou $f_0 = 398$ Hz) et $Q = 0,83$.
On a $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a donc une légère résonance.
On trace l'allure ci-dessous (les asymptotes sont en rouge et le gain en bleu).



Partie 3 : Le gabarit

Pour avoir un signal sinusoïdal satisfaisant en sortie, on veut que l'amplitude du deuxième harmonique du signal de sortie soit au maximum 5% de la valeur du fondamental du signal de sortie.
On veut par ailleurs avoir une atténuation maximale de -3 dB pour le fondamental.

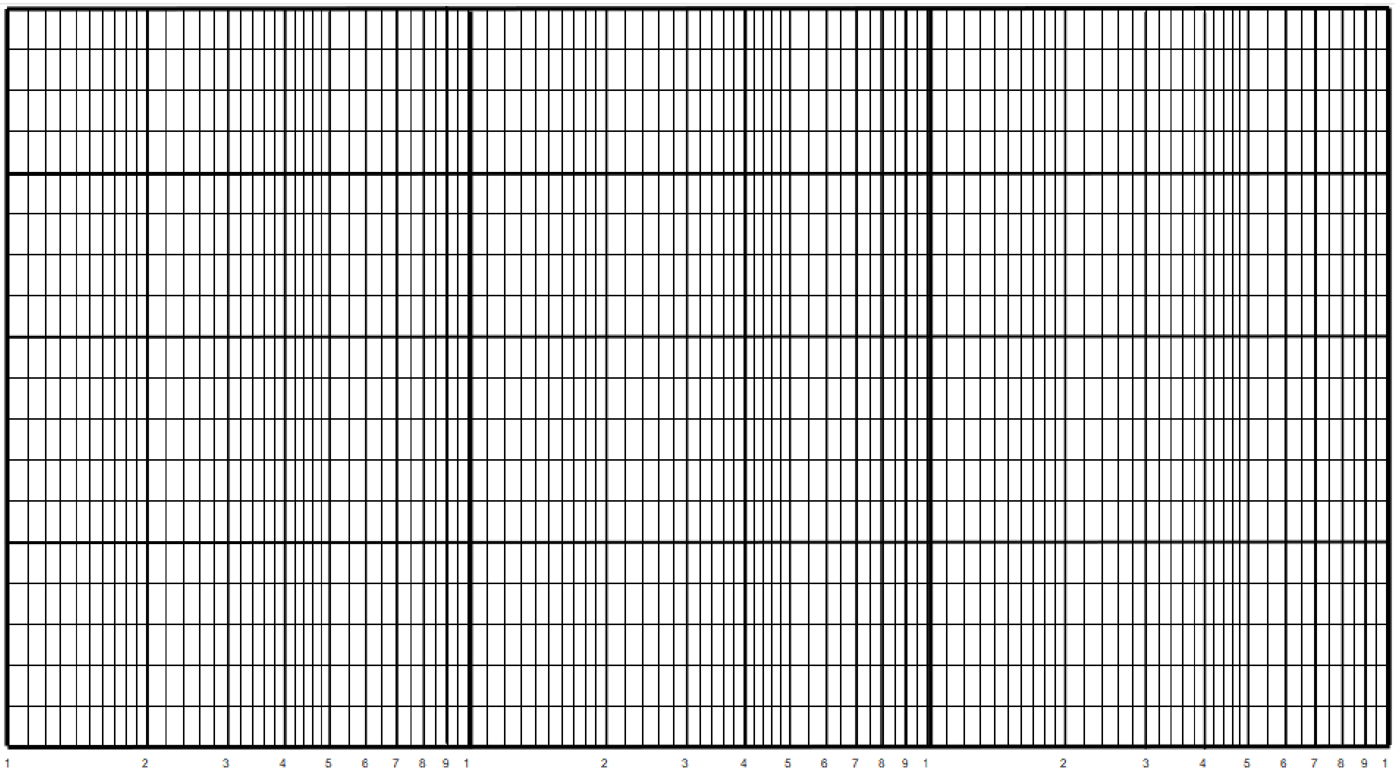
3a) A partir de ce cahier des charges, déterminer l'amplitude minimale du fondamental et l'amplitude maximale du deuxième harmonique du signal de sortie.

On calcule d'abord l'amplitude du fondamental de sortie (on sait qu'il doit être atténué au maximum de -3 dB). On utilise la relation : $S_{max} = 10^{\frac{G_{dB}}{20}} E_{max}$.
On trouve pour le fondamental $S_{max} = 115$ V.
Pour l'amplitude du deuxième harmonique à 1200 Hz, on prend 5% da la valeur précédente soit $S_{max} = 5,7$ V.

3b) Tracer le gabarit de filtre sur le diagramme semi-logarithmique ci-dessous. On explicitera les points du gabarit.

Pour f <400 Hz, on doit avoir $G_{dB} > -3$ dB. On place le premier point à 400 Hz et -3 GdB.
Pour $f > 1200$ Hz, on doit avoir $G_{dB} < 20\log\left(\frac{5,7}{54}\right) = -19,5$ dB. On place le deuxième point à 1200 Hz et -19,5 dB.

NOM : .... **Prénom : ....** **Groupe : .....**



3c) A partir du gabarit, calculer la pente minimale des asymptotes. Le filtre précédent respecte-t-il le cahier des charges ? Justifier.

On calcule la pente minimale : pente= $\frac{-19{,}5-(-3)}{\log 1200 - \log 400} = -34{,}6$ dB/décade.
Le filtre précédent est un filtre passe-bas du deuxième ordre. Sa pente est de -40 dB/décade, supérieure à la pente minimale calculée précedemment.
Ce filtre respecte bien le cahier des charges.