INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES ROUEN NORMANDIE

Devoir Surveillé de Mécanique des fluides

EC P8-2
J. Yon
23/6/23
durée : 1h30

/20 pts

Les calculatrices sont autorisées. Aucun document n'est autorisé.

Merci d'éteindre et de ranger les téléphones portables.

Toute réponse non justifiée n'apportera pas de points.
Dans les deux exercices qui suivent, de nombreuses questions sont indépendantes (notées *QI*), ne les manquez pas!

Exercice 1 : Pour se mettre en selle (questions de cours) *(4 points)*

L'équation d'Euler s'écrit

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left[\vec{\nabla}(\vec{v})\right]\vec{v}\right) = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}P$$

1. *(QI)* Rappeler les hypothèses de validité de cette équation. *(0.5pt)*
   Le fluide est supposé parfait (sans viscosité).
2. *(QI)* Rappeler le nom ainsi que l'expression en repère cartésien de l'opérateur $\vec{\nabla}$ appliqué à une fonction scalaire *f*. *(0.5pt)*
   Il s'agit de l'opérateur nabla ou gradient. En cartésien, il correspond à $\vec{\nabla}f = \left|\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{array}\right.$
3. *(QI)* Quelle est la différence entre fluide statique et stationnaire ? *(1pt)*
   Un écoulement stationnaire a un champ vectoriel invariable dans le temps. Un fluide statique n'a aucune vitesse.
4. Que devient l'équation d'Euler pour un fluide statique? Rappelez le nom du principe ainsi retrouvé. *(1pt)*
   Avec l'hypothèse de fluide statique, on retrouve le principe fondamental de la statique :
   $$\vec{\nabla}P = \rho\vec{g}$$
5. Montrer comment et avec quelles hypothèses cette égalité peut conduire au résultat $P + \rho g z = C^{st}$ où *z* représente la composante spatiale ascendante. *(1 pt)*

$$\left|\begin{array}{l}\frac{\partial P}{\partial x}\\ \frac{\partial P}{\partial y}\\ \frac{\partial P}{\partial z}\end{array}\right. = \left|\begin{array}{l}0\\ 0\\ -\rho g\end{array}\right. \rightarrow P(z)\ et\ \frac{dP}{dz} = -\rho g \rightarrow dP = -\rho g dz \rightarrow \int dP = \int -\rho g dz$$

$$\rightarrow P + \rho g z = C^{st}$$

Exercice 2 : Ajoutons un peu de vent *(16 points + 1 bonus)*

Dans cet exercice, on cherche à montrer que les vents dans une structure dépressionnaire tournent dans une direction imposée qui est différente selon l'hémisphère nord ou sud.

Pour les écoulements atmosphériques dans le référentiel terrestre, il convient de considérer la force de pesanteur ainsi que les forces d'inertie imposées par le caractère non galiléen du référentiel terrestre. Dans ces conditions, l'équation d'Euler s'écrit ainsi :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+[\vec{\nabla}(\vec{v})]\vec{v}\right)=\rho\vec{g}-\vec{\nabla}P-2\rho\vec{\Omega}\wedge\vec{v}$$

Dans cette expression, ρ est la masse volumique de l'air, $\vec{v}$ est le champ de vitesse, $\vec{g}$ l'accélération de pesanteur qui prend en compte la force d'inertie d'entrainement, P est le champ de pression et $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation de Terre par rapport au référentiel de géocentrique (supposé galiléen). $\vec{\Omega}$ a pour norme la vitesse angulaire de rotation de la Terre $(2\pi/T)$ et pour direction son axe de rotation.

1. *(QI)* L'écoulement sera considéré stationnaire. Quelle simplification découle de cette hypothèse ? *(1 pt)*

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}=\vec{0}$$

2. *(QI)* A quoi correspond le terme $\rho[\vec{\nabla}(\vec{v})]\vec{v}$ dans cette équation, que représente-t-il vis à vis de la dérivée particulaire de la vitesse, à quoi est-il homogène (à $\vec{\mathrm{f}_\mathrm{v}}$ *ou* à $\vec{\mathrm{F}_\mathrm{v}}$) ? *(2 pts)*
C'est la composante de dépendance spatiale de la dérivée particulaire multipliée par la masse volumique. Il s'agit donc du produit d'une masse par une accélération (homogène à une force) par unité de volume. Ce terme est donc homogène à $\vec{\mathrm{F}_\mathrm{v}}$ (N/m^3).

3. *(QI)* On souhaite comparer l'influence de ce terme dans l'équation d'Euler à celui de la force d'inertie de Coriolis. Pour y parvenir, on définit le nombre de Rossby, un nombre adimensionnel représentant le rapport entre $|[\vec{\nabla}(\vec{v})]\vec{v}|$ et $|2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}|$. Pour ce faire, vous devez associer à chaque quantité une grandeur représentative du problème étudié, que vous expliciterez. Ainsi, montrer, en vous justifiant, que le nombre de Rossby se rapporte à l'une des expressions suivantes *(2 pts)*:
A: $\dfrac{U^2}{2\Omega}$ B : $\dfrac{U}{2\Omega^2\mathrm{L}}$ C : $\dfrac{U}{2\Omega\mathrm{L}}$ D : $\dfrac{U}{\Omega\mathrm{L}^2}$
$R_o=\frac{|[\vec{\nabla}(\vec{v})]\vec{v}|}{|2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}|}=\frac{U^2/L}{2\Omega\mathrm{U}}=\frac{U}{2\Omega\mathrm{L}}$ avec U une vitesse représentative de l'écoulement et L une échelle représentative des écoulements observés.

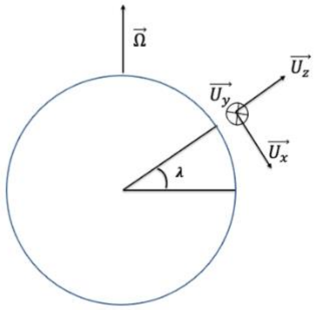
4. En considérant que la vitesse moyenne des vents est de l'ordre de 10 m/s et que les structures anticycloniques ou dépressives ont des dimensions de l'ordre de 1000 km, évaluer numériquement le nombre de Rossby et en déduire que le second terme de l'équation d'Euler peut être négligé dans notre étude. *(1 pt)*

$$R_o=\frac{U}{2\Omega\mathrm{L}}=\frac{U\cdot T}{4\pi\mathrm{L}}=\frac{10\cdot 24\times 3600}{4\times 3.14\times 10^6}=0.07$$

On en déduit que $|[\vec{\nabla}(\vec{v})]\vec{v}| << |2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}|$, c'est donc le second terme qui peut être négligé.

Point étape du problème : A l'aide des simplifications découlant de l'analyse dimensionnelle précédente, l'équation d'Euler devient :

$$\vec{\nabla}P = \rho\vec{g} - 2\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$



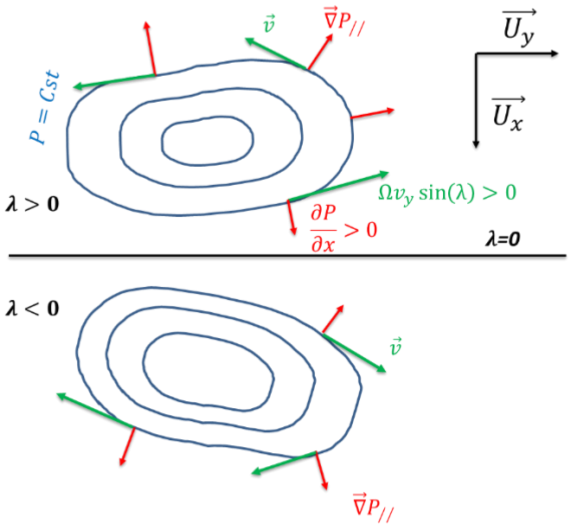
5. *(QI)* Les tourbillons qui se forment dans chaque hémisphère induisent des écoulements qui peuvent être considérés plans et parallèles au sol $(\vec{U_x}, \vec{U_y})$ dans le repère terrestre (voir figure ci-contre, la base utilisée est directe). Que dire alors de l'une des composantes v_x, v_y et v_z? *(1 pt)*
   L'écoulement étant plan et contenu dans $(\vec{U_x}, \vec{U_y})$, $v_z = 0$
6. Projeter l'équation d'Euler simplifiée afin d'obtenir 3 équations différentielles faisant intervenir $P, \rho, g, \Omega, \lambda$, les variables d'espace et certaines composantes de vitesses. *(1,5 pts)*

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{matrix}\right. - 2\rho \left|\begin{matrix} -\Omega\cos(\lambda) \\ 0 \\ \Omega\sin(\lambda) \end{matrix}\right. \wedge \left|\begin{matrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{matrix}\right.$$

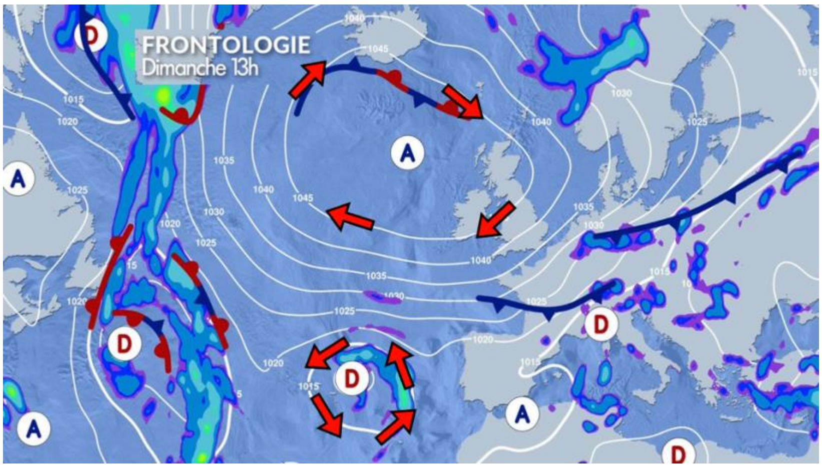
   C'est-à-dire

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2\rho\Omega v_y \sin(\lambda)$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2\rho\Omega v_x \sin(\lambda)$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g + 2\rho\Omega v_y \cos(\lambda)$$

7. Intéressons-nous, dans un premier temps, à la troisième composante (obtenue lorsque l'on projette cette expression suivant l'axe $(0, \vec{U_z})$). Que dire de ce résultat en l'absence de vent ? *(1 pt)*
   En l'absence de vent, on retrouve que la pression ne varie qu'avec l'altitude $\left(\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g\right)$ conformément au théorème de la statique des fluides discuté dans le premier exercice.
8. *(QI)* Rappeler la définition d'une isobare ainsi que le comportement du champ de gradient de P vis-à-vis de ces courbes. *(1 pt)*
   Une isobare est une courbe de l'espace ou la pression est constante. Par définition, le gradient est normal aux iso-valeurs.
9. La figure ci-dessous représente, en courbes continues, des isobares associées à des dépressions (circulation d'air avec une pression plus faible en son centre) formées dans les deux hémisphères. Reporter en rouge sur cette figure quelques gradients de pression (n'oubliez pas d'ajouter une légende). *(1 pt)*
   Par définition, le gradient est normal aux iso valeurs et orienté dans le sens de la croissance de la pression, ici du centre vers l'extérieur puisqu'il s'agit d'une dépression, voir flèches rouges.



10. *(QI)* Le champ de pesanteur étant orthogonal au plan de circulation des vents $(\overrightarrow{U_x}, \overrightarrow{U_y})$, l'égalité vectorielle réduite à 2 dimensions s'écrit $\vec{\nabla}P = -2\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ (correspondant aux deux premières composantes précédemment retrouvées). En déduire pourquoi les isobares sont également des lignes de courant. *(1.5 pts)*
Cette égalité montre que la vitesse (inscrite dans le plan d'observation) est nécessairement orthogonale au gradient de pression (le résultat du produit vectoriel est normal à chacun de ses vecteurs) et donc tangente aux isobares qui sont, par conséquent, également des lignes de courant.
11. Reporter sur la figure précédente, d'une autre couleur, quelques vecteurs vitesse <u>dont vous justifierez</u> la direction et le sens. Vous pourrez pour cela vous appuyer sur une discussion portant sur le signe des équations obtenues à la question 6 (composantes suivant *x* et *y*). En déduire si le sens de circulation des vents au sein d'une dépression est, dans l'hémisphère nord, dans le sens horaire ou anti-horaire. *(2 pts)*
Le sens des vecteurs vitesse est dicté par la règle des trois doigts de la main droite. On peut également le déduire d'une des composantes de l'égalité précédente. Par exemple, en un point de la courbe où $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$, sachant que $\frac{\partial P}{\partial x} = 2\rho\Omega v_y \sin(\lambda)$, on en déduit que $\Omega v_y \sin(\lambda) > 0$, et donc, dans l'hémisphère nord, la composante suivant y de la vitesse doit être positive. Au contraire, elle sera négative dans l'hémisphère sud. On voit bien sur le schéma que la circulation des vents dans l'hémisphère nord est bien dans le sens anti-horaire.
12. En déduire le sens de rotation dans chaque hémisphère d'un anticyclone, dont la surpression centrale chasse les nuages (vive les anticyclones !). Sur la carte météo ci-dessous, les dépressions sont représentées par un *D* et les anticyclones par un *A*. Ajouter des flèches indiquant le sens de rotation de ces structures. *(1 pt)*



Pour l'anticyclone, le gradient est dans le sens opposé au cas précédent. En respect du produit vectoriel, la vitesse est donc également dans le sens opposé et le sens de circulation s'en trouve inversé. L'anticyclone tourne donc dans le sens horaire dans l'hémisphère nord et anti-horaire dans l'hémisphère sud.

13. Question Bonus : On a tendance, à tort, à vouloir attribuer aux forces de Coriolis l'origine du sens de rotation de toute structure fluide. Sachant que pour une baignoire, l'ordre de grandeur de L est de 5 cm et celui de la vitesse U de 20 cm/s, évaluer l'ordre de grandeur du nombre de Rossby pour un petit tourbillon formé lors de la vidange d'une baignoire. Conclure. *(1 pt)*

$$R_o = \frac{U}{2\Omega \mathrm{L}} = \frac{U \cdot T}{4\pi \mathrm{L}} = \frac{20 \times 10^{-2} \cdot 24 \times 3600}{4 \times 3.14 \times 0.05} = 13751 \gg 1$$

On en déduit que pour ce type d'écoulement, les forces d'inerties de Coriolis ont un rôle totalement négligeable sur l'écoulement. Il n'y a donc pas de raison qu'elles induisent un sens de rotation différent selon l'hémisphère où se situe l'expérience.