

Les calculatrices sont autorisées. Aucun document n'est autorisé.

Merci d'éteindre et de ranger les téléphones portables.

Mais refroidissons ce processeur !

/24 pts

Les ailettes sont utilisées pour faciliter le refroidissement d'éléments chauffants. On les retrouve par exemple sur les processeurs informatiques (figure 1a). Dans cet exercice, nous modéliserons une des ailettes métalliques de ce dispositif par un pavé droit de longueur L , largeur d et d'épaisseur e (voir figure 1b). Cette dernière repose orthogonalement sur l'élément à refroidir de surface $d \times E$ de température T_m et de même matière (fer) que l'ailette. Cette dernière échange par convection et par rayonnement avec l'air ambiant à température T_∞ . Dans un premier temps nous allons tenter de déterminer le profil thermique au sein d'une ailette. Dans un second temps, nous évaluerons l'efficacité de l'utilisation d'une telle ailette.

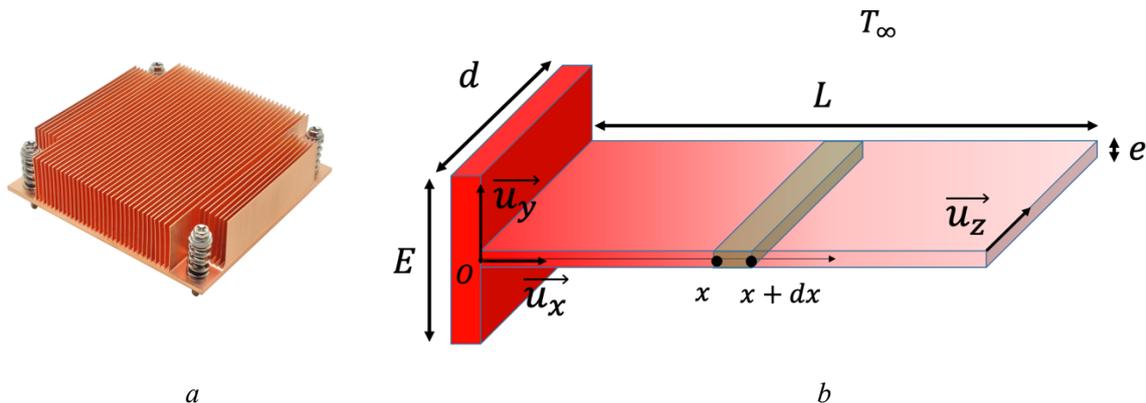


Figure 1 : Illustration du problème : Ailette de refroidissement d'un processeur informatique et schéma de l'ailette modélisée dans ce problème

Données numériques:

Pour le fer : $k_{tr} = 80 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $D = 23 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\rho = 7860 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,
 $C = 452 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $\varepsilon = 1$.

Autres valeurs : $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, $T_\infty = 300 \text{ K}$, $e = 2 \text{ mm}$, $L = 5 \text{ cm}$, $d = 3 \text{ cm}$,
 $E = 1 \text{ cm}$, $T_m = 60^\circ\text{C}$, $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

Formulaire

si $T_a \approx T_b$, alors $(T_a^4 - T_b^4) \approx (T_a - T_b) 4 T_b^3$

Les questions repérées par QI sont traitables de façon indépendantes.

Profil thermique au sein de l'ailette

1. *QI* A l'aide des nombres de Biot et de Fourier, justifier qu'au bout d'un temps de l'ordre de la dizaine de minutes, le profil de température sera stationnaire et ne dépendra que de la position x . On fera l'hypothèse que les pertes thermiques se produisant par les bords d'épaisseur e sont négligeables.

4 pts

On souhaite montrer que la température est uniforme suivant y et z . La longueur majorante dans ces deux directions est d . On calcul donc le nombre de Biot suivant d : $B_i(e) = \frac{hd}{k_{tr}} = \frac{10 \times 3 \times 10^{-2}}{80} = 3,75 \times 10^{-3} \ll 1$, ce qui permet de considérer que le profil thermique ne varie pas dans les directions y et z . Enfin, on calcule le nombre Fourier avec L pour échelle de longueur afin de s'assurer que le temps d'étude permet bien une relaxation thermique sur l'ensemble de l'ailette $F_o = \frac{Dt_c}{L^2} = \frac{23 \times 10^{-6} \times 600}{(5 \times 10^{-2})^2} = 5,52 > 1$ permettant de considérer le problème stationnaire au-delà de 10 minutes d'utilisation.

2. *QI* Afin de modéliser le profil thermique au sein de l'ailette, nous allons procéder à un bilan thermique sur une portion d'ailette d'épaisseur dx située en x (voir figure 1b). On notera $\phi_{cond}(x)$ le flux transmis par conduction dans le sens positif suivant x et $d\phi_{conv}(x)$ le flux élémentaire s'échappant dans la direction y (par les faces supérieures et inférieures). Montrer que ce bilan mène à l'équation $\frac{d\phi_{cond}(x)}{dx} dx + d\phi_{conv}(x) = 0$.

2 pts

$$\underbrace{\phi_{cond}(x+dx) - \phi_{cond}(x)}_0 + \underbrace{d\phi_{conv}(x)}_0 = 0$$

$$\frac{d\phi_{cond}(x)}{dx} dx + d\phi_{conv}(x) = 0$$

3. *QI* Expliciter $\phi_{cond}(x)$ en fonction de k_{tr} , d , e et $T(x)$, la température de l'ailette en x .

1 pt

$$\phi_{cond}(x) = \iint \overrightarrow{\varphi_{cond}} \cdot \vec{n} dS = \iint -k_{tr} \frac{dT}{dx}|_x \overrightarrow{u_x} \cdot \overrightarrow{u_x} dS = -k_{tr} \frac{dT}{dx}|_x d \times e$$

4. *QI* Expliciter $d\phi_{conv}(x)$ en fonction de h , d , $T(x)$, T_∞ et dx en négligeant, dans un premier temps, les échanges radiatifs.

1 pt

$$d\phi_{conv}(x) = 2 \iint \overrightarrow{\varphi_{conv}} \cdot \vec{n} dS = 2dx \int_0^d h(T(x) - T_\infty) \overrightarrow{U_y} \cdot \overrightarrow{U_y} \times dd =$$

$$= 2h \times d(T(x) - T_\infty) dx$$

5. Reprendre la question précédente en ajoutant les pertes radiatives. Vous linéariserez le résultat obtenu de façon à obtenir un résultat de la forme $d\phi_{C-R}(x) = \Gamma(T(x) - T_\infty) dx$ pour lequel vous explicitez la constante Γ . Si vous n'y parvenez pas, continuer le problème avec Γ .

2 pts

$d\phi_{CR}(x) = 2 \times d[h(T(x) - T_\infty) + \sigma(T^4(x) - T_\infty^4)] dx$ qui, après linéarisation devient
 $d\phi_{CR}(x) = 2d[h + \sigma 4T_\infty^3](T(x) - T_\infty) dx$
 Ainsi $\Gamma = 2d[h + \sigma 4T_\infty^3]$

6. Dédire des réponses aux questions 2, 3 et 5 une équation différentielle régissant le profil de température $T(x)$ au sein de l'ailette.

3 pts

$$\frac{d\phi_{cond}(x)}{dx} dx + d\phi_{CR}(x) = 0$$

$$\frac{d\left(-k_{tr} \frac{dT(x)}{dx} d \times e\right)}{dx} dx + \Gamma(T(x) - T_{\infty}) dx = 0$$

$$-k_{tr} \times d \times e \frac{d^2 T(x)}{dx^2} dx + \Gamma(T(x) - T_{\infty}) dx = 0$$

Ce qui mène à

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} - \frac{\Gamma}{k_{tr} \times d \times e} (T(x) - T_{\infty}) = 0$$

7. En faisant l'hypothèse que l'ailette est semi-infinie (qu'elle s'équilibre au loin avec la température ambiante), ce type d'équation différentielle conduit généralement à une décroissance exponentielle de la forme $T(x) = T_{\infty} + Ae^{-\frac{x}{\chi}}$ (démonstration non demandée) avec χ une échelle de longueur caractéristique de la dissipation thermique au sein de l'ailette. Expliciter χ en fonction de k_{tr} , d , e et Γ et, si réussite à la question 5, en fonction de k_{tr} , e , h , σ et T_{∞} puis réaliser l'application numérique.

2 pts

$$T(x) - T_{\infty} = Ae^{-\frac{x}{\chi}}, \frac{dT(x)}{dx} = -\frac{A}{\chi} e^{-\frac{x}{\chi}}, \frac{d^2 T(x)}{dx^2} = \frac{A}{\chi^2} e^{-\frac{x}{\chi}}$$

On a donc

$$\frac{A}{\chi^2} e^{-\frac{x}{\chi}} - \frac{\Gamma}{k_{tr} \times d \times e} Ae^{-\frac{x}{\chi}} = 0 \text{ et après simplifications :}$$

$$\chi = \sqrt{\frac{k_{tr} \times d \times e}{\Gamma}} = \sqrt{\frac{k_{tr} \times e}{2[h + \sigma 4T_{\infty}^3]}} = 7 \text{ cm}$$

8. QI En supposant la continuité des températures au sein de l'ailette et de son support, proposer une expression analytique de A . En déduire l'expression littérale de la température à l'extrémité de l'ailette dont vous ferez également le calcul numérique. Que dire de l'hypothèse d'ailette semi-infinie faite dans la question précédente?

2 pts

Par continuité de la température en $x=0$ on trouve $T(0) = A + T_{\infty} = T_m$ on a donc $A = T_m - T_{\infty}$ et donc $T(x) = T_m e^{-\frac{x}{\chi}} + T_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{x}{\chi}}\right)$.

On a donc $T(L) = T_m e^{-\frac{L}{\chi}} + T_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{L}{\chi}}\right) = 316 \text{ K}$ soit 43°C .

On ne retrouve pas la température de l'air, l'hypothèse d'ailette semi-infinie est donc discutable.

Effacité du dispositif

9. Exprimer analytiquement le flux thermique P_{avec}^b évacué par l'ailette par sa base en fonction de k_{tr} , χ , d , e , T_m et T_{∞} .

2 pts

En reprenant le résultat obtenu en question 3, $\phi_{cond}(0) = -k_{tr} \frac{dT}{dx} d \times e$ et l'expression générale du profil de température précédemment obtenu, on arrive à :

$$P_{avec}^b = \phi_{cond}(0) = \frac{k_{tr} \times d \times e}{\chi} (T_m - T_{\infty})$$

10. En déduire l'expression analytique du flux thermique P_{avec} globalement évacué par le dispositif à refroidir de surface $E \times d$ (on conservera l'hypothèse que les flux radiatifs peuvent être linéarisés). Vous exprimerez votre résultat en fonction de P_{avec}^b , h , σ , T_m , T_{∞} , d , E et e .

2 pts

En plus du flux évacué à la base de l'ailette, il faut considérer le flux perdu par convection et rayonnement par le reste de la plaque :

$$P_{avec} = P_{avec}^b + \phi_{conv} + \phi_{ray} = P_{avec}^b + \iint \overrightarrow{\varphi}_{cond} \cdot \vec{n} dS + \iint \overrightarrow{\varphi}_{ray} \cdot \vec{n} dS$$

$$P_{avec} = P_{avec}^b + h(T_m - T_\infty) \times d \times (E - e) + \sigma(T_m^4 - T_\infty^4) \times d \times (E - e)$$

$$P_{avec} = P_{avec}^b + [h + \sigma 4T_\infty^3](T_m - T_\infty) \times d \times (E - e)$$

1 pt

11. *QI* De façon similaire à la question précédente, quel aurait été le flux P_{sans} perdu au travers de la surface $E \times d$, en absence d'ailette.

$$P_{sans} = [h + \sigma 4T_\infty^3](T_m - T_\infty) \times d \times E$$

2 pts

12. En déduire l'expression du gain de déperdition thermique apporté par l'ailette. Vous en ferez une application numérique avec les données du problème.

$$G = \frac{P_{avec}}{P_{sans}} = \frac{P_{avec}^b + [h + \sigma 4T_\infty^3](T_m - T_\infty) \times d \times E - [h + \sigma 4T_\infty^3](T_m - T_\infty) \times d \times e}{[h + \sigma 4T_\infty^3](T_m - T_\infty) \times d \times E}$$

$$G = 1 - \frac{e}{E} + \frac{P_{avec}^b}{[h + \sigma 4T_\infty^3](T_m - T_\infty) \times d \times E}$$

$$G = 1 + \frac{e}{E} \left(\sqrt{\frac{2k_{tr}}{e[h + \sigma 4T_\infty^3]}} - 1 \right) = 14,9$$