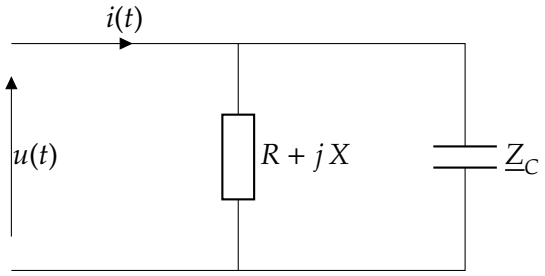
Correction - III.2 Relévement du facteur de puissance d'une installation

On veut augmenter le facteur de puissance pour avoir une intensité plus faible à puissance constante. Pour cela, on branche un condensateur en parallèle du dipôle $\underline{Z} = R + jX$ qui caractérise l'installation électrique.



On cherche la valeur de C à choisir pour avoir un facteur de puissance maximal, c'est à dire $\cos\varphi = 1$.
On peut déterminer l'expression de l'impédance équivalente :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{R + jX} + \frac{1}{\underline{Z}_C}$$

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{Z}_C\,(R + jX)}{R + jX + \underline{Z}_C}$$

On spécifie l'impédance du condensateur : $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$:

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{R + jX}{1 - XC\omega + jRC\omega}$$

On multiplie le dénominateur par son complexe conjugué :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{(R + jX)\,(1 - XC\omega - jRC\omega)}{(1 - XC\omega)^2 + (RC\omega)^2}$$

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{(R - RXC\omega + XRC\omega) + j\left(X - X^2C\omega - R^2C\omega\right)}{(1 - XC\omega)^2 + (RC\omega)^2}$$

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{R + j\left(X - X^2C\omega - R^2C\omega\right)}{(1 - XC\omega)^2 + (RC\omega)^2}$$

On calcule le module de $\underline{Z}_{eq}$: $|\underline{Z}_{eq}| = \dfrac{\sqrt{R^2 + (X - X^2C\omega - R^2C\omega)^2}}{(1 - XC\omega)^2 + (RC\omega)^2}$.
On en déduit le facteur de puissance :

$$\cos\varphi = \frac{Re\left(\underline{Z}_{eq}\right)}{|\underline{Z}_{eq}|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X - X^2C\omega - R^2C\omega)^2}}$$

Le facteur de puissance est maximal quand $\cos\varphi = 1$, il faut donc annuler la parenthèse :

$$X - X^2C\omega - R^2C\omega = 0$$

$$\boxed{C = \frac{X}{\omega\,(X^2 + R^2)}}$$