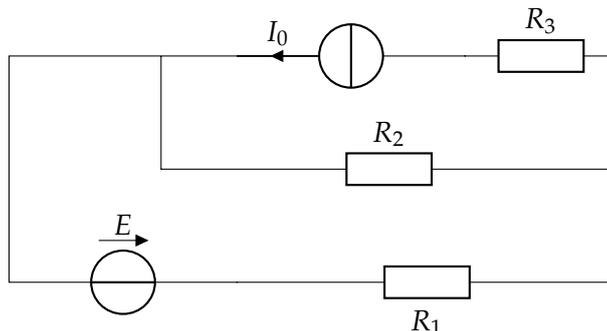


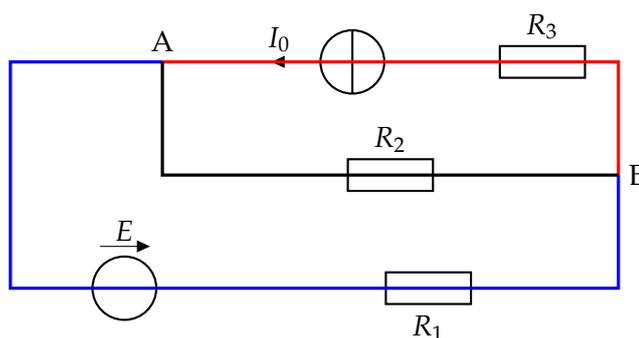
Correction - Exercice C1 - Etude d'un circuit comportant plusieurs générateurs



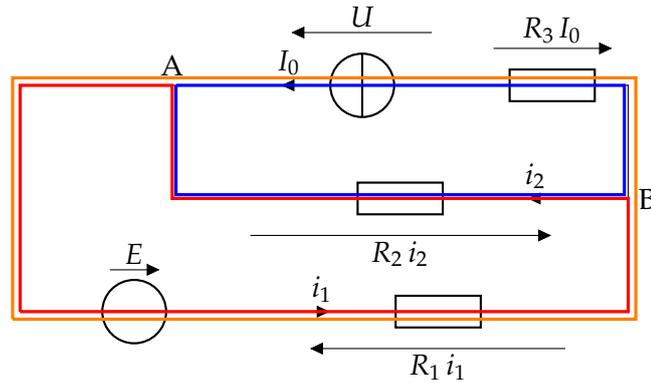
On étudie le circuit ci-dessus constitué d'une source de tension de fém E , d'une source de courant de courant électromoteur I_0 (avec $E > 0$ et $I_0 > 0$) et de trois résistances R_1 , R_2 et R_3 .

1. Identifier les nœuds, les branches et les mailles dans ce circuit (Colorier les branches sur un schéma puis les mailles sur un autre schéma).
2. Flécher la tension aux bornes de la source de courant. Ecrire les lois des nœuds et les lois des mailles pour chaque nœud et pour chaque maille. Combien d'équations indépendantes obtient-on ?
3. Donner l'expression littérale de cette tension. Vérifier l'homogénéité du résultat.
4. Pour la suite de l'exercice, on prendra $R_1 = R_2 = R$ et $R_3 = 2R$. Déterminer le caractère générateur ou récepteur de chacun des dipôles du circuit. Indiquer pour chacun si vous calculez la puissance absorbée ou fournie et vous explicitez les différents cas selon les valeurs des paramètres du problème.
5. Application numérique : $E = 5 \text{ V}$, $I_0 = 5 \text{ mA}$, $R = 100\Omega$
Calculer la puissance absorbée par chaque résistance.

1. Il y a deux noeuds A et B et 3 branches identifiées par trois couleurs sur le schéma ci-dessous :



On met en évidence les trois mailles en couleur (rouge, bleu et orange) sur le schéma ci-dessous :



2. Pour écrire les lois des noeuds et les lois des mailles, on choisit **arbitrairement** le sens de l'intensité dans les branches bleue (i_1) et noire (i_2) et on flèche les tensions aux bornes des résistances **en convention récepteur** pour pouvoir écrire la loi d'Ohm pour chacune d'elles (schéma ci-dessus). On a aussi choisi de flécher la tension aux bornes de la source de courant en convention générateur (ce n'est pas obligatoire).

- noeud A : $I_0 + i_2 - i_1 = 0$ (1)
- noeud B : $i_1 - i_2 - I_0 = 0$
- maille rouge (sens horaire) : $R_1 i_1 - E + R_2 i_2 = 0$ (2)
- maille bleue (sens horaire) : $-U + R_3 I_0 - R_2 i_2 = 0$ (3)
- maille orange (sens horaire) : $-U + R_3 I_0 + R_1 i_1 - E = 0$

Ces équations ne sont pas indépendantes. Les deux lois des noeuds sont identiques et une loi des mailles est une combinaison linéaire des deux autres lois des mailles (par exemple maille orange = maille rouge + maille bleue). On a donc trois équations indépendantes.

Il y a trois inconnues dans le circuit : i_1 , i_2 et U . Les trois équations indépendantes permettent de résoudre le problème : une loi des noeuds (notée (1)) et deux lois des mailles (par exemple celles notées (2) et (3)).

3. On résout le système de ces trois équations pour trouver U . Il faut exprimer les inconnues i_1 et i_2 en fonction de U .

$$(3) \Rightarrow i_2 = \frac{-U + R_3 I_0}{R_2}$$

$$(1) \Rightarrow i_1 = i_2 + I_0 = \frac{-U + R_3 I_0}{R_2} + I_0 = \frac{-U + (R_3 + R_2) I_0}{R_2}$$

$$(2) \Rightarrow R_1 \frac{-U + (R_3 + R_2) I_0}{R_2} - E + R_2 \frac{-U + R_3 I_0}{R_2} = 0 \Rightarrow U \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = -E + \frac{I_0}{R_2} (R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3)$$

ce qui donne

$$U = \frac{1}{R_1 + R_2} (-R_2 E + I_0 (R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3))$$

Vérification de l'homogénéité

$$\left[\frac{1}{R_1 + R_2} (-R_2 E + I_0 (R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3)) \right] = \frac{1}{[R]} ([R][U] + [R]^2 [I]) = [U] + [R][I] = [U]$$

On a bien obtenu une tension. Le résultat est homogène.

4. Les résistances R_1 , R_2 et R_3 sont des récepteurs dans tous les cas (la puissance absorbée aux bornes d'une résistance est toujours positive).

On simplifie l'expression précédente avec $R_1 = R_2 = R$ et $R_3 = 2R$:

$$U = \frac{-E + 5RI_0}{2}$$

Pour la source de courant, on est en convention générateur, on calcule donc la puissance fournie $\mathcal{P}_{f_i} = U \cdot I_0$.

On doit distinguer deux cas :

- Si $E < 5RI_0$, $U > 0$ et donc $\mathcal{P}_{f_i} > 0$, la source de courant a un comportement générateur.
- Si $E > 5RI_0$, $U < 0$ et donc $\mathcal{P}_{f_i} < 0$, la source de courant a un comportement récepteur.

Pour la source de tension, on est en convention générateur, on calcule donc la puissance fournie $\mathcal{P}_{f_E} = E \cdot i_1$. Il faut donc avoir l'expression de i_1 .

$$\text{Les équations précédentes permettent d'écrire } i_1 = \frac{-U + (R_3 + R_2)I_0}{R_2} = \frac{I_0}{2} + \frac{E}{2R}.$$

Dans tous les cas, $i_1 > 0$, donc $\mathcal{P}_{f_E} > 0$, la source de tension a toujours un comportement générateur.

5. On calcule les puissances absorbées par chaque résistance :

- Pour $R_1 = R$, $\mathcal{P}_{abs1} = Ri_1^2 = R\left(\frac{I_0}{2} + \frac{E}{2R}\right)^2 = 100\left(\frac{5 \cdot 10^{-3}}{2} + \frac{5}{2 \times 100}\right)^2 = 76 \text{ mW}$
- Pour $R_2 = R$, $\mathcal{P}_{abs2} = Ri_2^2 = R\left(\frac{I_0}{2} + \frac{E}{2R} - I_0\right)^2 = 100\left(\frac{5 \cdot 10^{-3}}{2} + \frac{5}{2 \times 100} - 5 \cdot 10^{-3}\right)^2 = 51 \text{ mW}$
- Pour $R_3 = 2R$, $\mathcal{P}_{abs3} = 2RI_0^2 = 2 \times 100 \times (5 \cdot 10^{-3})^2 = 5 \text{ mW}$