Variables aléatoires à densité

Jourd'huy

16 juin 2022

I/ Cas général

1/ Définitions

Définitions :

- Une fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité si :

I/ Cas général

1/ Définitions

Définitions :

- Une fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité si :
  - f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points

I/ Cas général

1/ Définitions

Définitions :

- Une fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité si :
  - f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points
  - $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$

I/ Cas général

1/ Définitions

Définitions :

- Une fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité si :
  - f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points
  - $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$
  - $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

I/ Cas général

1/ Définitions

Définitions :

- Une fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité si :
  - f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points
  - $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$
  - $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
- On dit qu'une variable aléatoire X est a densité si sa fonction de répartition F peut s'écrire sous la forme

  $F(x) = P(X \leqslant x)$

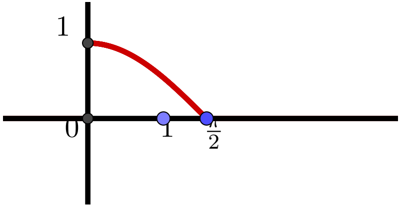
I/ Cas général

1/ Définitions

Définitions :

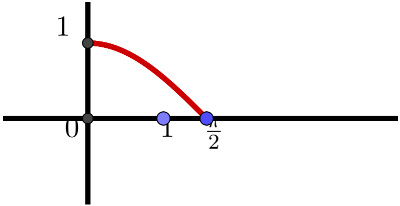
- Une fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité si :
  - f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points
  - $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$
  - $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
- On dit qu'une variable aléatoire X est a densité si sa fonction de répartition F peut s'écrire sous la forme $F(x) = P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ avec f une densité de probabilité.

Exemple : Sur $\mathbb{R}$, on définit $f : x \to \cos x$ si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et 0 sinon.



Exemple : Sur $\mathbb{R}$, on définit $f : x \to \cos x$ si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et 0 sinon.

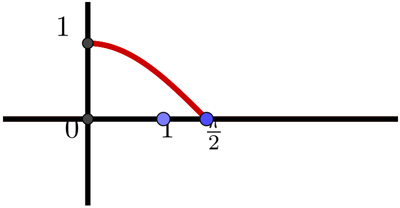
- f est de façon évidente positive et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Densité de probabilités

Exemple : Sur $\mathbb{R}$, on définit $f : x \to \cos x$ si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et 0 sinon.

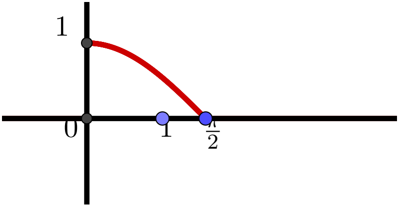
- f est de façon évidente positive et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. De plus
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x =$$



Densité de probabilités

Exemple : Sur $\mathbb{R}$, on définit $f : x \to \cos x$ si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et 0 sinon.

- f est de façon évidente positive et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. De plus
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x$$

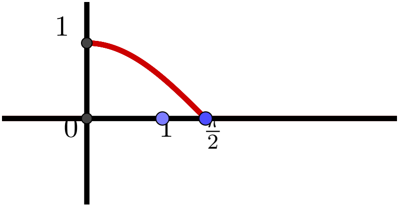


Exemple : Sur $\mathbb{R}$, on définit $f : x \to \cos x$ si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et 0 sinon.

- f est de façon évidente positive et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. De plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$



Densité de probabilités

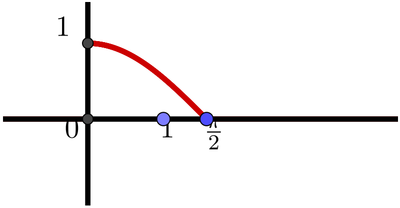
Exemple : Sur $\mathbb{R}$, on définit $f : x \to \cos x$ si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et 0 sinon.

- f est de façon évidente positive et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. De plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

donc f est une densité de probabilité.



Densité de probabilités

- Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de densité f, on a :

Densité de probabilités

- Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de densité f, on a :
  - Si $x < 0$ alors $F(x) = P(X \leqslant x)$

- Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de densité f, on a :
  - Si $x < 0$ alors $F(x) = P(X \leqslant x) = 0$
  - Si $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ alors

    $$F(x) = P(X \leqslant x)$$

Densité de probabilités

- Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de densité f, on a :
  - Si $x < 0$ alors $F(x) = P(X \leqslant x) = 0$
  - Si $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ alors

    $$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \cos t \,\mathrm{d}t$$

Densité de probabilités

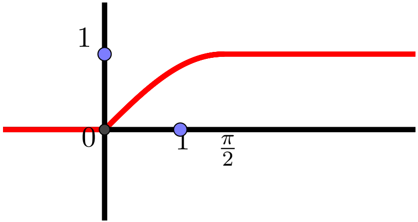
- Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de densité f, on a :
  - Si $x < 0$ alors $F(x) = P(X \leqslant x) = 0$
  - Si $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ alors
  $$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \cos t \, \mathrm{d}t = [\sin t]_0^x = \sin x$$
  - si $x > \frac{\pi}{2}$ alors $F(x) = P(X \leqslant x)$

Densité de probabilités

- Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de densité f, on a :
  - Si $x < 0$ alors $F(x) = P(X \leqslant x) = 0$
  - Si $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ alors
    $$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \cos t \, \mathrm{d}t = [\sin t]_0^x = \sin x$$
  - si $x > \frac{\pi}{2}$ alors $F(x) = P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, \mathrm{d}t = 1$

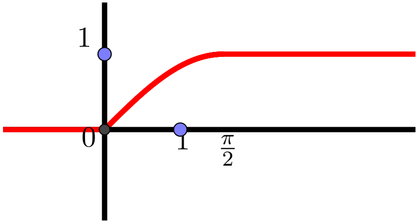
Densité de probabilités

- Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de densité f, on a :
  - Si $x < 0$ alors $F(x) = P(X \leqslant x) = 0$
  - Si $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ alors
    $$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \cos t \,\mathrm{d}t = [\sin t]_0^x = \sin x$$
  - si $x > \frac{\pi}{2}$ alors $F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \,\mathrm{d}t = 1$



Densité de probabilités

- Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de densité f, on a :
  - Si $x < 0$ alors $F(x) = P(X \leqslant x) = 0$
  - Si $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ alors
  $$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x \cos t \, \mathrm{d}t = [\sin t]_0^x = \sin x$$
  - si $x > \frac{\pi}{2}$ alors $F(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, \mathrm{d}t = 1$



F est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable partout sauf en 0

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f et F sa fonction de répartition.

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f et F sa fonction de répartition.

- F est continue sur $\mathbb{R}$

Fonctions de répartition

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f et F sa fonction de répartition.

- F est continue sur $\mathbb{R}$
- En tout point x_0 ou f est continue, F est dérivable et $F'(x_0) = f(x_0)$

<u>Démonstration :</u> Voir le cours de M1

Fonctions de répartition

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f et F sa fonction de répartition.

- F est continue sur $\mathbb{R}$
- En tout point x_0 ou f est continue, F est dérivable et $F'(x_0) = f(x_0)$

Démonstration : Voir le cours de M1

Remarque : F est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Fonctions de répartition

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f et F sa fonction de répartition.

- F est continue sur $\mathbb{R}$
- En tout point x_0 ou f est continue, F est dérivable et $F'(x_0) = f(x_0)$

Démonstration : Voir le cours de M1

Remarque : F est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Exemple : Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition $F_X : x \to \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

Fonctions de répartition

Variables aléatoires à densité
Jourd'huy
Cas général
Définitions
Opérations sur les variables aléatoires
Espérances et variances
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi exponentielle
Loi normale

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f et F sa fonction de répartition.

- F est continue sur $\mathbb{R}$
- En tout point x_0 ou f est continue, F est dérivable et $F'(x_0) = f(x_0)$

<u>Démonstration :</u> Voir le cours de M1

Remarque : F est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Exemple : Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition $F_X : x \to \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

La densité de X est alors $f_X : x \to$

Fonctions de répartition

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f et F sa fonction de répartition.

- F est continue sur $\mathbb{R}$
- En tout point x_0 ou f est continue, F est dérivable et $F'(x_0) = f(x_0)$

Démonstration : Voir le cours de M1

Remarque : F est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Exemple : Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition $F_X : x \to \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

La densité de X est alors $f_X : x \to \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \\ \end{cases}$

Fonctions de répartition

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f et F sa fonction de répartition.

- F est continue sur $\mathbb{R}$
- En tout point x_0 ou f est continue, F est dérivable et $F'(x_0) = f(x_0)$

<u>Démonstration :</u> Voir le cours de M1

Remarque : F est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Exemple : Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition $F_X : x \to \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

La densité de X est alors $f_X : x \to \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

Fonctions de répartition

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f et F sa fonction de répartition.

- F est continue sur $\mathbb{R}$
- En tout point x_0 ou f est continue, F est dérivable et $F'(x_0) = f(x_0)$

<u>Démonstration :</u> Voir le cours de M1

Remarque : F est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Exemple : Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition $F_X : x \to \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

La densité de X est alors $f_X : x \to \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f et a, b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f et a, b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$

- $P(X = a) = 0$

loi de X

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f et a, b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$

- $P(X = a) = 0$
- $P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

loi de X

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f et a, b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$

- $P(X = a) = 0$
- $P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- $P(X > a) = P(X \geqslant a) = \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

loi de X

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f et a, b deux nombres réels tels que $a \leqslant b$

- $P(X = a) = 0$
- $P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- $P(X > a) = P(X \geqslant a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

<u>Démonstration :</u>

2/ Opérations sur les variables aléatoires

2/ Opérations sur les variables aléatoires

Propriété : Si X est une variable aléatoire de densité f et $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ alors $Y = aX + b$ est une variable aléatoire de densité $g : x \to \dfrac{1}{|a|} f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$

Démonstration : On appelle F et G les fonctions de répartitions des variables aléatoires X et Y. Soit $x \in \mathbb{R}$,
$G(x) = P(Y \leqslant x) = P(aX + b \leqslant x)$

2/ Opérations sur les variables aléatoires

Propriété : Si X est une variable aléatoire de densité f et $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ alors $Y = aX + b$ est une variable aléatoire de densité $g : x \to \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$

Démonstration : On appelle F et G les fonctions de répartitions des variables aléatoires X et Y. Soit $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = P(Y \leqslant x) = P(aX + b \leqslant x) = P(aX \leqslant x - b)$

Loi d'une somme

Propriété : Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** de densité respectives f et g alors $X+Y$ est une variable aléatoire de densité h le *produit de convolution* de f et g défini par $\forall x \in \mathbb{R},\ f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$

Loi d'une somme

Propriété : Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** de densité respectives f et g alors $X+Y$ est une variable aléatoire de densité h le *produit de convolution* de f et g défini par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$

Exemple : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives

$$f : x \to \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \ si\ x \geqslant 0 \\ 0 \ si\ x < 0 \end{cases} \quad \text{et } g : x \to \begin{cases} \mu e^{-\mu x} \ si\ x \geqslant 0 \\ 0 \ si\ x < 0 \end{cases}.$$

Loi d'une somme

Propriété : Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** de densité respectives f et g alors $X+Y$ est une variable aléatoire de densité h le *produit de convolution* de f et g défini par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f * g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$

Exemple : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives

$$f : x \to \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \; si \; x \geqslant 0 \\ 0 \; si \; x < 0 \end{cases} \quad \text{et } g : x \to \begin{cases} \mu e^{-\mu x} \; si \; x \geqslant 0 \\ 0 \; si \; x < 0 \end{cases}.$$

Remarque :

- Si f et g deux fonctions telles que $f * g$ existe alors $f * g = g * f$

Loi d'une somme

Propriété : Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** de densité respectives f et g alors $X+Y$ est une variable aléatoire de densité h le *produit de convolution* de f et g défini par $\forall x \in \mathbb{R},\ f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$

Exemple : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives

$$f : x \to \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \ si \ x \geqslant 0 \\ 0 \ si \ x < 0 \end{cases} \quad \text{et } g : x \to \begin{cases} \mu e^{-\mu x} \ si \ x \geqslant 0 \\ 0 \ si \ x < 0 \end{cases}.$$

Remarque :

- Si f et g deux fonctions telles que $f*g$ existe alors $f*g = g*f$
- On a une formule "voisine" pour les variables aléatoires discrètes et indépendantes :
  $P(X+Y=j) = \sum_{i \in I} P(X=i)P(Y=j-i)$

3/ Espérances et variances

Définition : Soit X une variable aléatoire de densité f, L'espérance de X, si elle existe, est le nombre

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, \mathrm{d}x$$

3/ Espérances et variances

Définition : Soit X une variable aléatoire de densité f, L'espérance de X, si elle existe, est le nombre

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple : X est une variable aléatoire de densité

$$f : x \to \begin{cases} x + \frac{1}{2}\ si\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0\ sinon \end{cases}$$

3/ Espérances et variances

Définition : Soit X une variable aléatoire de densité f, L'espérance de X, si elle existe, est le nombre

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, \mathrm{d}x$$

Exemple : X est une variable aléatoire de densité

$$f : x \to \begin{cases} x + \frac{1}{2} \; si \; 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \; sinon \end{cases}$$

Remarque : L'espérance n'existe pas toujours. Par exemple, la fonction $f : x \to \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$ est une densité de probabilité mais $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\, \mathrm{d}x$ diverge.

Changement de variables

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f, a, b deux nombres réels et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue :

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f, a, b deux nombres réels et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue :

- $Y = \varphi(X)$ est une variable aléatoire qui admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\, f(x)\, \mathrm{d}x$ et existe et dans ce cas $E(Y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\, \mathrm{d}x$

Changement de variables

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f, a, b deux nombres réels et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue :

- $Y = \varphi(X)$ est une variable aléatoire qui admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\, f(x)\, \mathrm{d}x$ et existe et dans ce cas $E(Y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\, \mathrm{d}x$
- Si l'espérance de X existe alors $E(aX+b) = aE(X) + b$

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f, a, b deux nombres réels et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue :

- $Y = \varphi(X)$ est une variable aléatoire qui admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\, f(x)\, dx$ et existe et dans ce cas $E(Y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\, dx$
- Si l'espérance de X existe alors $E(aX + b) = aE(X) + b$

<u>Démonstration :</u>

Variance

Définition Soit X une variable aléatoire de densité f :

- La variance de X est le nombre, s'il existe,

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Variance

Définition Soit X une variable aléatoire de densité f :

- La variance de X est le nombre, <u>s'il existe</u>,
  $$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$
- L'écart type de X est le nombre, <u>s'il existe</u>,
  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Variance

Définition Soit X une variable aléatoire de densité f :

- La variance de X est le nombre, s'il existe,
$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\, \mathrm{d}x$$
- L'écart type de X est le nombre, s'il existe, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : La variance et l'écart type permettent de mesurer l'hétérogénéité de la variable aléatoire

Propriétés de la variance

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f et a, b deux nombres réels :

- Si la variance de X existe alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$

Propriétés de la variance

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f et a, b deux nombres réels :

- Si la variance de X existe alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$
- Si la variance de X existe alors $V(aX+b) = a^2 V(X)$ et $\sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X)$

<u>Démonstration :</u> C'est la même qu'au chapitre 2

Propriété : Soient X une variable aléatoire admettant une densité f et a, b deux nombres réels :

- Si la variance de X existe alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$
- Si la variance de X existe alors $V(aX+b) = a^2 V(X)$ et $\sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X)$

Démonstration : C'est la même qu'au chapitre 2

Exemple : Si X est une variable aléatoire de densité
$$f : x \to \begin{cases} x + \frac{1}{2}\ si\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0\ sinon \end{cases}$$

II/ Lois usuelles

1/ Loi uniforme

II/ Lois usuelles

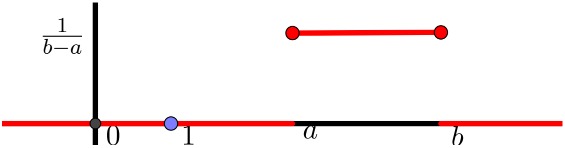
1/ Loi uniforme

Définition : Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a;b]$, avec $a < b$ et notée $\mathcal{U}([a;b])$, si elle a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ si $x \in [a;b]$ et 0 sinon

II/ Lois usuelles

1/ Loi uniforme

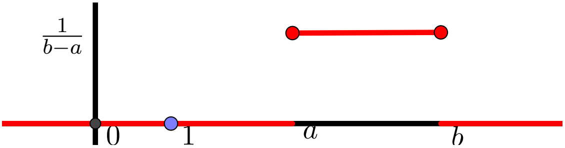
Définition : Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a;b]$, avec $a < b$ et notée $\mathcal{U}([a;b])$, si elle a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ si $x \in [a;b]$ et 0 sinon



II/ Lois usuelles

1/ Loi uniforme

Définition : Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a;b]$, avec $a<b$ et notée $\mathcal{U}([a;b])$, si elle a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ si $x\in[a;b]$ et 0 sinon



Démonstration :

Propriété : Soit X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([a;b])$ avec $a < b$ et $c < d$ deux réels de $[a,b]$:

Propriétés de la loi uniforme

Propriété : Soit X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([a;b])$ avec $a < b$ et $c < d$ deux réels de $[a,b]$:

- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Propriétés de la loi uniforme

Propriété : Soit X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([a;b])$ avec $a < b$ et $c < d$ deux réels de $[a,b]$:

- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
- Si F est la fonction de répartition de X alors
$$F(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \; si \; a \leqslant x < b \\ 1 \; si \; x \geqslant b \end{cases}$$
- $P(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$

Propriétés de la loi uniforme

Propriété : Soit X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([a;b])$ avec $a < b$ et $c < d$ deux réels de $[a,b]$:

- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
- Si F est la fonction de répartition de X alors

$$F(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \; si \; a \leqslant x < b \\ 1 \; si \; x \geqslant b \end{cases}$$

- $P(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$

<u>Démonstration :</u>

Exemple : Si X est une variable aléatoire suivant $\mathcal{U}([-1;3])$ alors :

Propriétés de la loi uniforme

Exemple : Si X est une variable aléatoire suivant $\mathcal{U}([-1;3])$ alors :

- $E(X) = \frac{-1+3}{2} = 1$ et $V(X) = \frac{(3-(-1))^2}{12} = \frac{4}{3}$

Propriétés de la loi uniforme

Exemple : Si X est une variable aléatoire suivant $\mathcal{U}([-1;3])$ alors :

- $E(X) = \frac{-1+3}{2} = 1$ et $V(X) = \frac{(3-(-1))^2}{12} = \frac{4}{3}$
- $P(X > 2)$

Propriétés de la loi uniforme

Exemple : Si X est une variable aléatoire suivant $\mathcal{U}([-1;3])$ alors :

- $E(X) = \frac{-1+3}{2} = 1$ et $V(X) = \frac{(3-(-1))^2}{12} = \frac{4}{3}$
- $P(X > 2) = P(2 \leqslant X \leqslant 3) = \frac{3-2}{3-(-1))} = \frac{1}{4}$

Propriétés de la loi uniforme

Exemple : Si X est une variable aléatoire suivant $\mathcal{U}([-1;3])$ alors :

- $E(X) = \frac{-1+3}{2} = 1$ et $V(X) = \frac{(3-(-1))^2}{12} = \frac{4}{3}$
- $P(X > 2) = P(2 \leqslant X \leqslant 3) = \frac{3-2}{3-(-1))} = \frac{1}{4}$

Remarque :

- L'espérance, c'est à dire la moyenne, correspond au milieu de l'intervalle.

Propriétés de la loi uniforme

Exemple : Si X est une variable aléatoire suivant $\mathcal{U}([-1;3])$ alors :

- $E(X) = \frac{-1+3}{2} = 1$ et $V(X) = \frac{(3-(-1))^2}{12} = \frac{4}{3}$
- $P(X > 2) = P(2 \leqslant X \leqslant 3) = \frac{3-2}{3-(-1))} = \frac{1}{4}$

Remarque :

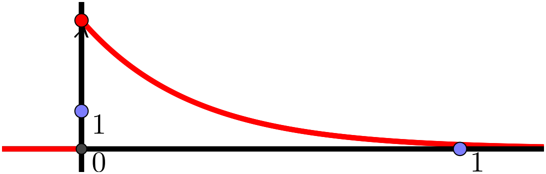
- L'espérance, c'est à dire la moyenne, correspond au milieu de l'intervalle.
- La probabilité d'un intervalle correspond à la proportion de cet intervalle par rapport à l'intervalle de départ.

2/ Loi exponentielle

Définition Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si elle a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \; si \; x \geqslant 0 \\ 0 \; si \; x < 0 \end{cases}$

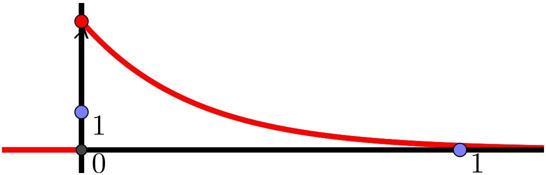
2/ Loi exponentielle

Définition Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si elle a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \; si \; x \geqslant 0 \\ 0 \; si \; x < 0 \end{cases}$



2/ Loi exponentielle

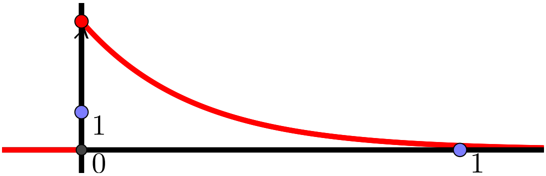
Définition Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si elle a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \; si \; x \geqslant 0 \\ 0 \; si \; x < 0 \end{cases}$



Démonstration : f est de façon évidente positive et continue sur $\mathbb{R}^*$.

2/ Loi exponentielle

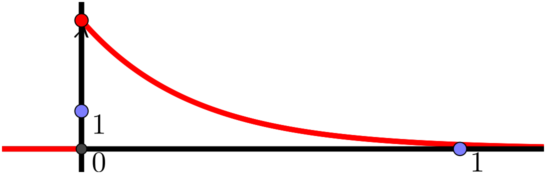
Définition Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si elle a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ } si \text{ } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ } si \text{ } x < 0 \end{cases}$



Démonstration : f est de façon évidente positive et continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{X \to +\infty} \int_0^X \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$

2/ Loi exponentielle

Définition Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si elle a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \; si \; x \geqslant 0 \\ 0 \; si \; x < 0 \end{cases}$



<u>Démonstration :</u> f est de façon évidente positive et continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to+\infty} \int_0^X \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to+\infty} \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^X = \lim_{X\to+\infty} -e^{-\lambda X} + 1 = 1$

Propriétés de la loi exponentielle

Propriété : Si X est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et a, b deux nombres réels tels que $0 \leqslant a < b$ alors :

Propriétés de la loi exponentielle

Propriété : Si X est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et a, b deux nombres réels tels que $0 \leqslant a < b$ alors :

- $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

Propriétés de la loi exponentielle

Propriété : Si X est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et a, b deux nombres réels tels que $0 \leqslant a < b$ alors :

- $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$
- $P(X > a) = e^{-\lambda a}$

Propriétés de la loi exponentielle

Propriété : Si X est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et a, b deux nombres réels tels que $0 \leqslant a < b$ alors :

- $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$
- $P(X > a) = e^{-\lambda a}$
- $P(X < b) = 1 - e^{-\lambda b}$

Propriété : Si X est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et a, b deux nombres réels tels que $0 \leqslant a < b$ alors :

- $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$
- $P(X > a) = e^{-\lambda a}$
- $P(X < b) = 1 - e^{-\lambda b}$

Démonstration :

Propriétés de la loi exponentielle

Propriété : Si X est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et a, b deux nombres réels tels que $0 \leqslant a < b$ alors :

- $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$
- $P(X > a) = e^{-\lambda a}$
- $P(X < b) = 1 - e^{-\lambda b}$

Démonstration :

Exemple : Si X suit la loi $\mathcal{E}(2)$ alors $P(3 \leqslant X \leqslant 10)$

Propriétés de la loi exponentielle

Propriété : Si X est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et a, b deux nombres réels tels que $0 \leqslant a < b$ alors :

- $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$
- $P(X > a) = e^{-\lambda a}$
- $P(X < b) = 1 - e^{-\lambda b}$

Démonstration :

Exemple : Si X suit la loi $\mathcal{E}(2)$ alors $P(3 \leqslant X \leqslant 10) = e^{-6} - e^{-20} \simeq 0,002$

Propriétés de la loi exponentielle

Propriété : Si X est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et a, b deux nombres réels tels que $0 \leqslant a < b$ alors :

- $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$
- $P(X > a) = e^{-\lambda a}$
- $P(X < b) = 1 - e^{-\lambda b}$

Démonstration :

Exemple : Si X suit la loi $\mathcal{E}(2)$ alors $P(3 \leqslant X \leqslant 10) = e^{-6} - e^{-20} \simeq 0,002$

Espérance et variance

Propriété : Si une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ alors $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Propriété : Si une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ alors $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

<u>Démonstration :</u>

Propriété : Si une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ alors $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Démonstration :

Propriété : Une variable aléatoire suivant une loi exponentielle est dite sans mémoire car $\forall (s,t) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $P_{X>s}(X > s+t) = P(X > s+t / X > s) = P(X > t)$

Démonstration : Voir le TD

3/ Loi normale

3/ Loi normale

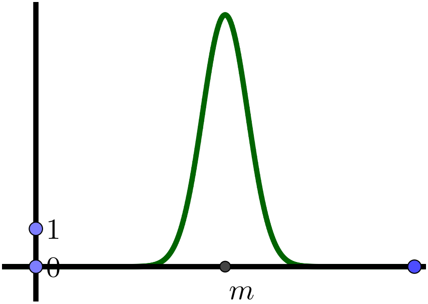
Définition : Une variable aléatoire X suit la loi normale de paramètre $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, notée $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$ si elle a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

3/ Loi normale

Définition : Une variable aléatoire X suit la loi normale de paramètre $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, notée $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$ si elle a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

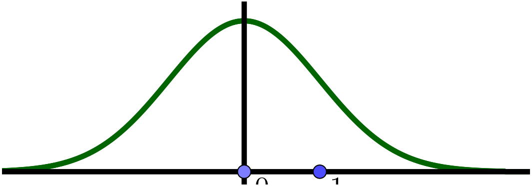


Remarque : Cette loi est dite normale car elle apparait dans de nombreux phénomènes naturels

Remarque : Cette loi est dite normale car elle apparait dans de nombreux phénomènes naturels

Définition :

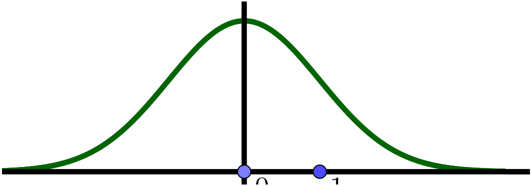
- La loi $\mathcal{N}(0;1)$ est dite loi normale centrée, car $m = 0$,



Remarque : Cette loi est dite normale car elle apparait dans de nombreux phénomènes naturels

Définition :

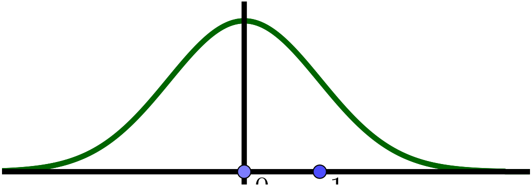
- La loi $\mathcal{N}(0;1)$ est dite loi normale centrée, car $m = 0$, et réduite, car $\sigma = 1$



Remarque : Cette loi est dite normale car elle apparait dans de nombreux phénomènes naturels

Définition :

- La loi $\mathcal{N}(0;1)$ est dite loi normale centrée, car $m = 0$, et réduite, car $\sigma = 1$
- La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite est notée Φ



Propriété : Soit X^* une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$:

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Loi normale centrée réduite

Propriété : Soit X^* une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$:

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x < X^* < x) = 2\Phi(x) - 1$

Propriété : Soit X^* une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$:

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x < X^* < x) = 2\Phi(x) - 1$

Loi normale centrée réduite

Propriété : Soit X^* une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$:

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x < X^* < x) = 2\Phi(x) - 1$

<u>Démonstration :</u>

Calcul de la fonction de répartition

Propriété : Soit X une variable aléatoire et $(m;\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$:

- X suit $\mathcal{N}(m;\sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$

Calcul de la fonction de répartition

Propriété : Soit X une variable aléatoire et $(m;\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$:

- X suit $\mathcal{N}(m;\sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$
- Dans ce cas, si F est la fonction de répartition de X alors $F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$

Calcul de la fonction de répartition

Propriété : Soit X une variable aléatoire et $(m;\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$:

- X suit $\mathcal{N}(m;\sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$
- Dans ce cas, si F est la fonction de répartition de X alors $F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$

Démonstration :

Calcul de la fonction de répartition

Propriété : Soit X une variable aléatoire et $(m;\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$:

- X suit $\mathcal{N}(m;\sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$
- Dans ce cas, si F est la fonction de répartition de X alors $F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$

Démonstration :

Exemple : Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(3,2;0,16)$.
Calculer $P(X<3)$ et $P(X>4)$.

Propriété : Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$.

- $P(-\sigma \leqslant X - m \leqslant \sigma) \simeq 0,683$
- $P(-2\sigma \leqslant X - m \leqslant 2\sigma) \simeq 0,954$
- $P(-3\sigma \leqslant X - m \leqslant 3\sigma) \simeq 0,997$

Espérance et écart type

Propriété : Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$.

- $P(-\sigma \leqslant X - m \leqslant \sigma) \simeq 0,683$
- $P(-2\sigma \leqslant X - m \leqslant 2\sigma) \simeq 0,954$
- $P(-3\sigma \leqslant X - m \leqslant 3\sigma) \simeq 0,997$

Démonstration :

Espérance et écart type

Propriété : Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$.

- $P(-\sigma \leqslant X - m \leqslant \sigma) \simeq 0,683$
- $P(-2\sigma \leqslant X - m \leqslant 2\sigma) \simeq 0,954$
- $P(-3\sigma \leqslant X - m \leqslant 3\sigma) \simeq 0,997$

<u>Démonstration :</u>

Propriété : Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ alors $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$

Espérance et écart type

Propriété : Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$.

- $P(-\sigma \leqslant X - m \leqslant \sigma) \simeq 0,683$
- $P(-2\sigma \leqslant X - m \leqslant 2\sigma) \simeq 0,954$
- $P(-3\sigma \leqslant X - m \leqslant 3\sigma) \simeq 0,997$

Démonstration :

Propriété : Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ alors $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$

Démonstration :

Somme de VA indépendantes

Propriété : Si X et X' sont deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois normales respectives $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$ et $\mathcal{N}(m';\sigma'^2)$

- La variable aléatoire $Z = X + Y$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m+m';\sigma^2+\sigma'^2)$

Somme de VA indépendantes

Propriété : Si X et X' sont deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois normales respectives $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$ et $\mathcal{N}(m';\sigma'^2)$

- La variable aléatoire $Z = X + Y$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m+m';\sigma^2+\sigma'^2)$
- $E(X+X') = m+m' = E(X)+E(X')$

Somme de VA indépendantes

Propriété : Si X et X' sont deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois normales respectives $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$ et $\mathcal{N}(m';\sigma'^2)$

- La variable aléatoire $Z = X + Y$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m + m';\sigma^2 + \sigma'^2)$
- $E(X + X') = m + m' = E(X) + E(X')$
- $V(X + X') = \sigma^2 + \sigma'^2 = V(X) + V(X')$

Somme de VA indépendantes

Propriété : Si X et X' sont deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois normales respectives $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$ et $\mathcal{N}(m';\sigma'^2)$

- La variable aléatoire $Z = X + Y$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m+m';\sigma^2+\sigma'^2)$
- $E(X+X') = m+m' = E(X)+E(X')$
- $V(X+X') = \sigma^2+\sigma'^2 = V(X)+V(X')$

Exemple : Soient X et X' des variables aléatoires indépendantes suivant les lois $\mathcal{N}(200;160)$ et $\mathcal{N}(600;360)$. Calculer $P(750 < X + X' < 850)$