Couple de Variables Aléatoires discrètes

Jourd'huy

13 juin 2022

I/ Définitions

Définition : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$.

I/ Définitions

Définition : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$.

- La loi conjointe de X et de Y, ou loi du couple (X, Y) est l'application $\begin{array}{l} X(\Omega) \times Y(\Omega) \to [0; 1] \\ (x_i; y_j) \to P(X = x_i \cap Y = y_j) \end{array}$

I/ Définitions

Définition : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$.

- La loi conjointe de X et de Y, ou loi du couple (X, Y) est l'application $\begin{array}{l} X(\Omega) \times Y(\Omega) \to [0;1] \\ (x_i; y_j) \to P(X = x_i \cap Y = y_j) \end{array}$
- les variables X et Y sont appelées variables marginales du couple (X, Y)

I/ Définitions

Définition : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$.

- La loi conjointe de X et de Y, ou loi du couple (X, Y) est l'application $\begin{array}{l} X(\Omega) \times Y(\Omega) \to [0;1] \\ (x_i; y_j) \to P(X = x_i \cap Y = y_j) \end{array}$
- les variables X et Y sont appelées variables marginales du couple (X, Y)
- La loi de X (respectivement de Y) est appelée loi marginale de X (respectivement de Y)

Exemple : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes tel que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall (i : j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $P(X = i \cap Y = j) = (1-p)^2 p^{i+j-2}$ avec $p \in]0; 1[$

Lois conjointe et marginales

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$ alors

Lois conjointe et marginales

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$ alors

- La loi conjointe de X et de Y détermine complètement la loi marginale de X, c'est à dire que $\forall i \in I, P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P(X = x_i \cap Y = y_j)$

Lois conjointe et marginales

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$ alors

- La loi conjointe de X et de Y détermine complètement la loi marginale de X, c'est à dire que $\forall i \in I, P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P(X = x_i \cap Y = y_j)$
- $$\sum_{(i;j) \in I \times J} P(X = x_i \cap Y = y_j) = 1$$

<u>Démonstration :</u>

Univers fini

Remarque : Si les variables aléatoires X et Y sont finies alors les valeurs de la définition précédente peuvent être résumées dans le tableau suivant :

Univers fini

Remarque : Si les variables aléatoires X et Y sont finies alors les valeurs de la définition précédente peuvent être résumées dans le tableau suivant :

$X \setminus Y$	y_1	$\cdots$	y_m	
x_1	$P(x_1 \cap y_1)$	$\cdots$	$P(x_1 \cap y_m)$	
x_2	$P(x_2 \cap y_1)$	$\cdots$	$P(x_2 \cap y_m)$	
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
x_i	$P(x_i \cap y_1)$	$\cdots$	$P(x_i \cap y_m)$	
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
x_n	$P(x_n \cap y_1)$	$\cdots$	$P(x_n \cap y_m)$	

Univers fini

Remarque : Si les variables aléatoires X et Y sont finies alors les valeurs de la définition précédente peuvent être résumées dans le tableau suivant :

$X \setminus Y$	y_1	$\cdots$	y_m	**loi de** X
x_1	$P(x_1 \cap y_1)$	$\cdots$	$P(x_1 \cap y_m)$	$P(X = x_1)$
x_2	$P(x_2 \cap y_1)$	$\cdots$	$P(x_2 \cap y_m)$	$P(X = x_2)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	$P(x_i \cap y_1)$	$\cdots$	$P(x_i \cap y_m)$	$P(X = x_i)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	$P(x_n \cap y_1)$	$\cdots$	$P(x_n \cap y_m)$	$P(X = x_n)$

Remarque : Si les variables aléatoires X et Y sont finies alors les valeurs de la définition précédente peuvent être résumées dans le tableau suivant :

$X \setminus Y$	y_1	$\cdots$	y_m	**loi de** X
x_1	$P(x_1 \cap y_1)$	$\cdots$	$P(x_1 \cap y_m)$	$P(X = x_1)$
x_2	$P(x_2 \cap y_1)$	$\cdots$	$P(x_2 \cap y_m)$	$P(X = x_2)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	$P(x_i \cap y_1)$	$\cdots$	$P(x_i \cap y_m)$	$P(X = x_i)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	$P(x_n \cap y_1)$	$\cdots$	$P(x_n \cap y_m)$	$P(X = x_n)$
loi de Y	$P(Y = y_1)$	$\cdots$	$P(Y = y_m)$	1

Exemple : On définit la loi conjointe du couple de variables aléatoires (X, Y) par

Univers fini

Exemple : On définit la loi conjointe du couple de variables aléatoires (X, Y) par

$X \setminus Y$	0	1	2	
0	0,2	0,5	0	
1	0,1	0,15	0,05	

Exemple : On définit la loi conjointe du couple de variables aléatoires (X, Y) par

$X \setminus Y$	0	1	2	**loi de** X
0	0,2	0,5	0	0,7
1	0,1	0,15	0,05	0,3

Exemple : On définit la loi conjointe du couple de variables aléatoires (X, Y) par

$X \setminus Y$	0	1	2	**loi de** X
0	0,2	0,5	0	0,7
1	0,1	0,15	0,05	0,3
loi de Y	0,3	0,65	0,05	1

Exemple : On définit la loi conjointe du couple de variables aléatoires (X, Y) par

$X \setminus Y$	0	1	2	**loi de** X
0	0,2	0,5	0	0,7
1	0,1	0,15	0,05	0,3
loi de Y	0,3	0,65	0,05	1

On obtient aussi dans ce tableau les loi marginales de X et de Y

II/ Loi conditionnelle

Définition : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$ et $j_0 \in J$ tel que $P(Y = y_{j_0}) \neq 0$.

II/ Loi conditionnelle

Définition : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$ et $j_0 \in J$ tel que $P(Y = y_{j_0}) \neq 0$.

La loi de X sachant que $Y = y_{j_0}$, est l'application

$$P_{Y=y_{j_0}} : \begin{array}{l} X(\Omega) \to [0;1] \\ x_i \to P_{Y=y_{j_0}}(X = x_i) = P(X = x_i / Y = y_{j_0}) \end{array}$$

II/ Loi conditionnelle

Définition : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$ et $j_0 \in J$ tel que $P(Y = y_{j_0}) \neq 0$.

La loi de X sachant que $Y = y_{j_0}$, est l'application

$$P_{Y=y_{j_0}} : \begin{array}{l} X(\Omega) \to [0;1] \\ x_i \to P_{Y=y_{j_0}}(X = x_i) = P(X = x_i / Y = y_{j_0}) \end{array}$$

avec

$$P_{Y=y_{j_0}}(X = x_i) = \frac{P(X = x_i \cap Y = y_{j_0})}{P(Y = y_{j_0})}$$

II/ Loi conditionnelle

Définition : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$ et $j_0 \in J$ tel que $P(Y = y_{j_0}) \neq 0$.

La loi de X sachant que $Y = y_{j_0}$, est l'application

$$P_{Y=y_{j_0}} : \begin{array}{l} X(\Omega) \to [0;1] \\ x_i \to P_{Y=y_{j_0}}(X = x_i) = P(X = x_i / Y = y_{j_0}) \end{array}$$ avec

$$P_{Y=y_{j_0}}(X = x_i) = \frac{P(X = x_i \cap Y = y_{j_0})}{P(Y = y_{j_0})}$$

Exemple : En utilisant la loi conjointe précédente

$P_{Y=1}(X = 0)$

II/ Loi conditionnelle

Définition : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$ et $j_0 \in J$ tel que $P(Y = y_{j_0}) \neq 0$.

La loi de X sachant que $Y = y_{j_0}$, est l'application

$$P_{Y=y_{j_0}} : \begin{array}{l} X(\Omega) \to [0;1] \\ x_i \to P_{Y=y_{j_0}}(X = x_i) = P(X = x_i / Y = y_{j_0}) \end{array}$$ avec

$$P_{Y=y_{j_0}}(X = x_i) = \frac{P(X = x_i \cap Y = y_{j_0})}{P(Y = y_{j_0})}$$

Exemple : En utilisant la loi conjointe précédente $P_{Y=1}(X = 0) = \frac{P(X=0 \cap Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{0,5}{0,65} \simeq 0,77$ est "la probabilité que $X = 0$ sachant que $Y = 1$"

II/ Loi conditionnelle

Définition : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$ et $j_0 \in J$ tel que $P(Y = y_{j_0}) \neq 0$.
La loi de X sachant que $Y = y_{j_0}$, est l'application

$$P_{Y=y_{j_0}} : \begin{array}{l} X(\Omega) \to [0;1] \\ x_i \to P_{Y=y_{j_0}}(X = x_i) = P(X = x_i / Y = y_{j_0}) \end{array}$$

avec

$$P_{Y=y_{j_0}}(X = x_i) = \frac{P(X = x_i \cap Y = y_{j_0})}{P(Y = y_{j_0})}$$

Exemple : En utilisant la loi conjointe précédente $P_{Y=1}(X = 0) = \frac{P(X=0 \cap Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{0{,}5}{0{,}65} \simeq 0,77$ est "la probabilité que $X = 0$ sachant que $Y = 1$"

Remarque : On définit de la même façon la loi de Y sachant que $X = x_i$ si $P(X = x_i) \neq 0$

Définition : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$ tel que $\forall i \in I, P(X = x_i) \neq 0$ et $\forall j \in J, P(Y = y_j) \neq 0$.

Indépendance

Définition : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$ tel que $\forall i \in I, P(X = x_i) \neq 0$ et $\forall j \in J, P(Y = y_j) \neq 0$. Les variables X et Y sont dites indépendantes si l'une de ces trois propriétés équivalentes est réalisée :

Indépendance

Définition : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$ tel que $\forall i \in I, P(X = x_i) \neq 0$ et $\forall j \in J, P(Y = y_j) \neq 0$. Les variables X et Y sont dites indépendantes si l'une de ces trois propriétés équivalentes est réalisée :

- $\forall (i; j) \in I \times J,\ P_{Y=y_j}(X = x_i) = P(X = x_i)$

Indépendance

Définition : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$ tel que $\forall i \in I, P(X = x_i) \neq 0$ et $\forall j \in J, P(Y = y_j) \neq 0$. Les variables X et Y sont dites indépendantes si l'une de ces trois propriétés équivalentes est réalisée :

- $\forall (i; j) \in I \times J,\ P_{Y=y_j}(X = x_i) = P(X = x_i)$
- $\forall (i; j) \in I \times J,\ P_{X=x_i}(Y = y_j) = P(Y = y_j)$

Indépendance

Définition : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$ tel que $\forall i \in I, P(X = x_i) \neq 0$ et $\forall j \in J, P(Y = y_j) \neq 0$. Les variables X et Y sont dites indépendantes si l'une de ces trois propriétés équivalentes est réalisée :

- $\forall (i; j) \in I \times J,\ P_{Y=y_j}(X = x_i) = P(X = x_i)$
- $\forall (i; j) \in I \times J,\ P_{X=x_i}(Y = y_j) = P(Y = y_j)$
- $\forall (i; j) \in I \times J,$
  $P(X = x_i \cap Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$

Exemple :

- Dans l'exemple précédent, on a vu que $P_{Y=1}(X=0) \simeq 0,77$

Exemple :

- Dans l'exemple précédent, on a vu que $P_{Y=1}(X=0) \simeq 0,77 \neq 0,7 = P(X=0)$. Les variables aléatoires ne sont donc pas indépendantes.

Exemple :

- Dans l'exemple précédent, on a vu que $P_{Y=1}(X=0) \simeq 0,77 \neq 0,7 = P(X=0)$. Les variables aléatoires ne sont donc pas indépendantes.
- Reprenons le couple (X,Y) de loi conjointe $P(X=i \cap Y=j) = (1-p)^2 p^{i+j-2}$

Exemple :

- Dans l'exemple précédent, on a vu que $P_{Y=1}(X=0) \simeq 0,77 \neq 0,7 = P(X=0)$. Les variables aléatoires ne sont donc pas indépendantes.
- Reprenons le couple (X, Y) de loi conjointe $P(X = i \cap Y = j) = (1-p)^2 p^{i+j-2}$ $\forall (i:j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $P(X=i)P(Y=j) = (1-p)p^{i-1} \times (1-p)p^{j-1}$

Indépendance

Exemple :

- Dans l'exemple précédent, on a vu que $P_{Y=1}(X=0) \simeq 0,77 \neq 0,7 = P(X=0)$. Les variables aléatoires ne sont donc pas indépendantes.
- Reprenons le couple (X, Y) de loi conjointe $P(X=i \cap Y=j) = (1-p)^2 p^{i+j-2}$ $\forall (i:j) \in (\mathbb{N}^*)^2$,
  $P(X=i)P(Y=j) = (1-p)p^{i-1} \times (1-p)p^{j-1}$
  $P(X=i)P(Y=j) = (1-p)^2 p^{i+j-2} = P(X=i \cap Y=j)$.

Exemple :

- Dans l'exemple précédent, on a vu que $P_{Y=1}(X=0) \simeq 0,77 \neq 0,7 = P(X=0)$. Les variables aléatoires ne sont donc pas indépendantes.
- Reprenons le couple (X,Y) de loi conjointe $P(X=i \cap Y=j) = (1-p)^2 p^{i+j-2}$
  $\forall (i:j) \in (\mathbb{N}^*)^2$,
  $P(X=i)P(Y=j) = (1-p)p^{i-1} \times (1-p)p^{j-1}$
  $P(X=i)P(Y=j) = (1-p)^2 p^{i+j-2} = P(X=i \cap Y=j)$.
  Les variables aléatoires sont donc indépendantes

Indépendance

Propriété : Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes indépendantes, $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ alors

Indépendance

Propriété : Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes indépendantes, $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires discrètes indépendantes.

Propriété : Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes indépendantes, $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires discrètes indépendantes.

Démonstration :

Indépendance

Propriété : Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes indépendantes, $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires discrètes indépendantes.

<u>Démonstration :</u>

Exemple : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors X^2 et $2Y$ sont aussi indépendantes

VA mutuellement indépendantes

Définition : On dit que les variables aléatoires $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ sont mutuellement indépendantes si

VA mutuellement indépendantes

Définition : On dit que les variables aléatoires $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ sont mutuellement indépendantes si $\forall (x_1; x_2; \cdots; x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots X_n(\Omega)$,
$P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \cdots \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \cdots \times P(X_n = x_n)$

VA mutuellement indépendantes

Définition : On dit que les variables aléatoires $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ sont mutuellement indépendantes si $\forall (x_1; x_2; \cdots; x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots X_n(\Omega)$, $P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \cdots \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \cdots \times P(X_n = x_n)$

Propriété : Si $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ sont mutuellement indépendantes alors elles sont aussi indépendantes deux à deux

VA mutuellement indépendantes

Définition : On dit que les variables aléatoires $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ sont mutuellement indépendantes si $\forall (x_1; x_2; \cdots; x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots X_n(\Omega)$, $P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \cdots \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \cdots \times P(X_n = x_n)$

Propriété : Si $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ sont mutuellement indépendantes alors elles sont aussi indépendantes deux à deux mais la réciproque est fausse.

VA mutuellement indépendantes

Définition : On dit que les variables aléatoires $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ sont mutuellement indépendantes si $\forall (x_1; x_2; \cdots; x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots X_n(\Omega)$, $P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \cdots \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times \cdots \times P(X_n = x_n)$

Propriété : Si $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ sont mutuellement indépendantes alors elles sont aussi indépendantes deux à deux mais la réciproque est fausse.

Exemple : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et $Z = |Y - X|$.

III/ Loi d'une VA fonction de deux VA

Propriété : Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Z = g(X, Y)$ et $a \in Z(\Omega)$.

III/ Loi d'une VA fonction de deux VA

Propriété : Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Z = g(X, Y)$ et $a \in Z(\Omega)$. On a alors

$$P(Z = a) = \sum_{(x;y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)|g(x,y)=a} P(X = x \cap Y = y)$$

III/ Loi d'une VA fonction de deux VA

Propriété : Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Z = g(X, Y)$ et $a \in Z(\Omega)$. On a alors

$$P(Z = a) = \sum_{(x;y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) | g(x,y) = a} P(X = x \cap Y = y)$$

Démonstration :

III/ Loi d'une VA fonction de deux VA

Propriété : Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Z = g(X,Y)$ et $a \in Z(\Omega)$. On a alors

$$P(Z = a) = \sum_{(x;y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) | g(x,y) = a} P(X = x \cap Y = y)$$

<u>Démonstration :</u>

Cas particulier : Si X et Y sont **indépendantes** alors

III/ Loi d'une VA fonction de deux VA

Propriété : Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Z = g(X, Y)$ et $a \in Z(\Omega)$. On a alors

$$P(Z = a) = \sum_{(x;y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) | g(x,y) = a} P(X = x \cap Y = y)$$

Démonstration :

Cas particulier : Si X et Y sont **indépendantes** alors

$$P(Z = a) = \sum_{(x;y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) | g(x,y) = a} P(X = x)P(Y = y)$$

Somme de lois de Poisson

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes **indépendantes** suivant les lois $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$ avec $(\lambda; \mu) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$

Somme de lois de Poisson

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes **indépendantes** suivant les lois $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$ avec $(\lambda; \mu) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$ alors $Z = X + Y$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$

Somme de lois de Poisson

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes **indépendantes** suivant les lois $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$ avec $(\lambda;\mu) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$ alors $Z = X + Y$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$

Démonstration :

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant les lois $\mathcal{B}(n_1; p)$ et $\mathcal{B}(n_2; p)$ avec $(n_1; n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $p \in [0; 1]$

Somme de lois binomiales

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant les lois $\mathcal{B}(n_1; p)$ et $\mathcal{B}(n_2; p)$ avec $(n_1; n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $p \in [0; 1]$ alors $Z = X + Y$ suit la loi $\mathcal{B}(n_1 + n_2; p)$

Somme de lois binomiales

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** suivant les lois $\mathcal{B}(n_1;p)$ et $\mathcal{B}(n_2;p)$ avec $(n_1;n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $p \in [0;1]$ alors $Z = X + Y$ suit la loi $\mathcal{B}(n_1+n_2;p)$

<u>Démonstration :</u> Z correspond à n_1+n_2 expériences de Bernoulli de paramètres p indépendantes et compte le nombre de succès donc elle suit $\mathcal{B}(n_1+n_2;p)$

Espérance

Propriété : Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes

Espérance

Propriété : Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes

- Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ alors
$$E(g(X,Y)) = \sum_{(x;y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)P(X = x \cap Y = y)$$

Espérance

Propriété : Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes

- Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ alors
$$E(g(X,Y)) = \sum_{(x;y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)P(X = x \cap Y = y)$$
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$.

Espérance

Propriété : Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes

- Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ alors
$$E(g(X,Y)) = \sum_{(x;y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)P(X = x \cap Y = y)$$
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$.
- X et Y sont **indépendantes** $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

Espérance

Propriété : Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes

- Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ alors
  $$E(g(X,Y)) = \sum_{(x;y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)P(X = x \cap Y = y)$$
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$.
- X et Y sont **indépendantes** $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

Exemple : Dans l'exemple fini précédent :

$X \setminus Y$	0	1	2	**loi de** X
0	0,2	0,5	0	0,7
1	0,1	0,15	0,05	0,3
loi de Y	0,3	0,65	0,05	1

Espérance

Propriété : Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes

- Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ alors
$$E(g(X,Y)) = \sum_{(x;y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)P(X = x \cap Y = y)$$
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$.
- X et Y sont **indépendantes** $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

Exemple : Dans l'exemple fini précédent :

$X \setminus Y$	0	1	2	**loi de** X
0	0,2	0,5	0	0,7
1	0,1	0,15	0,05	0,3
loi de Y	0,3	0,65	0,05	1

Remarque : La réciproque de cette propriété est fausse

IV/ Covariance

Définition : Soient X et Y deux variables aléatoires alors la covariance de X et Y est le nombre, *s'il existe*,

IV/ Covariance

Définition : Soient X et Y deux variables aléatoires alors la covariance de X et Y est le nombre, *s'il existe*,
$cov(X,Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$

IV/ Covariance

Définition : Soient X et Y deux variables aléatoires alors la covariance de X et Y est le nombre, *s'il existe*,
$cov(X,Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$

Remarques :

- On définit la covariance car elle intervient dans $V(X+Y)$

IV/ Covariance

Définition : Soient X et Y deux variables aléatoires alors la covariance de X et Y est le nombre, *s'il existe*,
$cov(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$

Remarques :

- On définit la covariance car elle intervient dans $V(X + Y)$
- **ATTENTION :** $cov(X, Y)$ peut être négatif

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires dont la variance existe et a, b, c, d quatre nombres réels. alors :

Propriétés de la covariance

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires dont la variance existe et a, b, c, d quatre nombres réels. alors :

- $cov(X, Y) = cov(Y, X)$

Propriétés de la covariance

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires dont la variance existe et a, b, c, d quatre nombres réels. alors :

- $cov(X,Y) = cov(Y,X)$
- $cov(X,X) = V(X) \geqslant 0$

Propriétés de la covariance

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires dont la variance existe et a, b, c, d quatre nombres réels. alors :

- $cov(X,Y) = cov(Y,X)$
- $cov(X,X) = V(X) \geqslant 0$
- $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Propriétés de la covariance

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires dont la variance existe et a, b, c, d quatre nombres réels. alors :

- $cov(X,Y) = cov(Y,X)$
- $cov(X,X) = V(X) \geqslant 0$
- $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- $cov(aX+b, cY+d) = ac.cov(X,Y)$

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires dont la variance existe et a, b, c, d quatre nombres réels. alors :

- $cov(X, Y) = cov(Y, X)$
- $cov(X, X) = V(X) \geqslant 0$
- $cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- $cov(aX + b, cY + d) = ac.cov(X, Y)$

Démonstration :

Les deux premières propriétés sont évidentes

Propriétés de la covariance

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires dont la variance existe et a, b, c, d quatre nombres réels. alors :

- $cov(X,Y) = cov(Y,X)$
- $cov(X,X) = V(X) \geqslant 0$
- $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- $cov(aX+b, cY+d) = ac.cov(X,Y)$

<u>Démonstration :</u>
Les deux premières propriétés sont évidentes

Propriétés de la covariance

Exemple : Dans l'exemple fini précédent :

$X \setminus Y$	0	1	2	**loi de** X
0	0,2	0,5	0	0,7
1	0,1	0,15	0,05	0,3
loi de Y	0,3	0,65	0,05	1

Exemple : Dans l'exemple fini précédent :

$X \setminus Y$	0	1	2	**loi de X**
0	0,2	0,5	0	0,7
1	0,1	0,15	0,05	0,3
loi de Y	0,3	0,65	0,05	1

On a vu que $E(XY) = 0,25$ et
$E(X)E(Y) = 0,3 \times 0,75 = 0,225$

Propriétés de la covariance

Exemple : Dans l'exemple fini précédent :

$X \setminus Y$	0	1	2	**loi de** X
0	0,2	0,5	0	0,7
1	0,1	0,15	0,05	0,3
loi de Y	0,3	0,65	0,05	1

On a vu que $E(XY) = 0,25$ et
$E(X)E(Y) = 0,3 \times 0,75 = 0,225$ donc
$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0,25 - 0,225 = 0,025$

covariance d'une somme

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires *dont la variance existe* alors :

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires *dont la variance existe* alors :

- $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires *dont la variance existe* alors :

- $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$
- $V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2cov(X,Y)$

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires *dont la variance existe* alors :

- $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$
- $V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2cov(X,Y)$

Démonstration :

VA indépendantes

Propriété : On peut généraliser la propriété précédente. Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires discrètes, on a

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$$

Propriété : On peut généraliser la propriété précédente. Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires discrètes, on a

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(X_i, X_j)$$

VA indépendantes

Propriété : On peut généraliser la propriété précédente. Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires discrètes, on a

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(X_i, X_j)$$

Propriété : Si deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** alors :

VA indépendantes

Propriété : On peut généraliser la propriété précédente. Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires discrètes, on a

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(X_i, X_j)$$

Propriété : Si deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** alors :

- $cov(X, Y) = 0$

VA indépendantes

Propriété : On peut généraliser la propriété précédente. Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires discrètes, on a

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(X_i, X_j)$$

Propriété : Si deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** alors :

- $cov(X, Y) = 0$
- $V(X+Y) = V(X-Y) = V(X) + V(Y)$

VA indépendantes

Propriété : On peut généraliser la propriété précédente. Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires discrètes, on a

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} cov(X_i, X_j)$$

Propriété : Si deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** alors :

- $cov(X, Y) = 0$
- $V(X + Y) = V(X - Y) = V(X) + V(Y)$

<u>Démonstration :</u>

VA indépendantes

ATTENTION : La réciproque de cette propriété est fausse. Deux variables aléatoires peuvent avoir une covariance nulle et ne pas être indépendantes.

VA indépendantes

ATTENTION : La réciproque de cette propriété est fausse. Deux variables aléatoires peuvent avoir une covariance nulle et ne pas être indépendantes.

Exemple : Soient X et Y deux variables aléatoires avec X suivant la loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$ et $Y = \begin{cases} 1 \text{ si } X = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

VA indépendantes

ATTENTION : La réciproque de cette propriété est fausse. Deux variables aléatoires peuvent avoir une covariance nulle et ne pas être indépendantes.

Exemple : Soient X et Y deux variables aléatoires avec X suivant la loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$ et $Y = \begin{cases} 1 \text{ si } X = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Propriété : On peut généraliser la propriété précédente. Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires discrètes

indépendantes 2 à 2,

VA indépendantes

ATTENTION : La réciproque de cette propriété est fausse. Deux variables aléatoires peuvent avoir une covariance nulle et ne pas être indépendantes.

Exemple : Soient X et Y deux variables aléatoires avec X suivant la loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$ et $Y = \begin{cases} 1 \text{ si } X = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Propriété : On peut généraliser la propriété précédente. Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires discrètes **indépendantes 2 à 2**, on a $V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

V/ Coefficient de corrélation linéaire

Définition : Soient X et Y deux variables aléatoires alors le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est le nombre,

s'il existe

V/ Coefficient de corrélation linéaire

Définition : Soient X et Y deux variables aléatoires alors le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est le nombre,

s'il existe $\rho(X,Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

V/ Coefficient de corrélation linéaire

Définition : Soient X et Y deux variables aléatoires alors le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est le nombre,

$$s\text{'il existe } \rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Exemple : Dans l'exemple fini précédent :

$X \setminus Y$	0	1	2	**loi de X**
0	0,2	0,5	0	0,7
1	0,1	0,15	0,05	0,3
loi de Y	0,3	0,65	0,05	1

V/ Coefficient de corrélation linéaire

Définition : Soient X et Y deux variables aléatoires alors le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est le nombre,

$$\textit{s'il existe } \rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Exemple : Dans l'exemple fini précédent :

$X \setminus Y$	0	1	2	**loi de** X
0	0,2	0,5	0	0,7
1	0,1	0,15	0,05	0,3
loi de Y	0,3	0,65	0,05	1

- On a vu que $cov(X,Y) = 0,025$.

Propriété

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires *dont la variance existe* et a, b, c, d quatre nombres réels tels que $a \neq 0$ et $c \neq 0$ alors

Propriété

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires *dont la variance existe* et a, b, c, d quatre nombres réels tels que $a \neq 0$ et $c \neq 0$ alors $\rho(aX + b, cY + d) =$

Propriété

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires *dont la variance existe* et a, b, c, d quatre nombres réels tels que $a \neq 0$ et $c \neq 0$ alors $\rho(aX+b, cY+d) = \epsilon\rho(X,Y)$ avec $\epsilon = 1$ si $ac > 0$ et $\epsilon = -1$ si $ac < 0$

Propriété

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires *dont la variance existe* et a, b, c, d quatre nombres réels tels que $a \neq 0$ et $c \neq 0$ alors $\rho(aX+b, cY+d) = \epsilon\rho(X,Y)$ avec $\epsilon = 1$ si $ac > 0$ et $\epsilon = -1$ si $ac < 0$

Démonstration :

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires *dont la variance existe* alors :

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires *dont la variance existe* alors :

- $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires *dont la variance existe* alors :

- $-1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1$
- $|\rho(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P(Y = aX + b) = 1$.

Propriété : Si X et Y sont deux variables aléatoires *dont la variance existe* alors :

- $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$
- $|\rho(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P(Y = aX + b) = 1$.
  Dans ce cas, on dit que $Y = aX + b$ presque surement

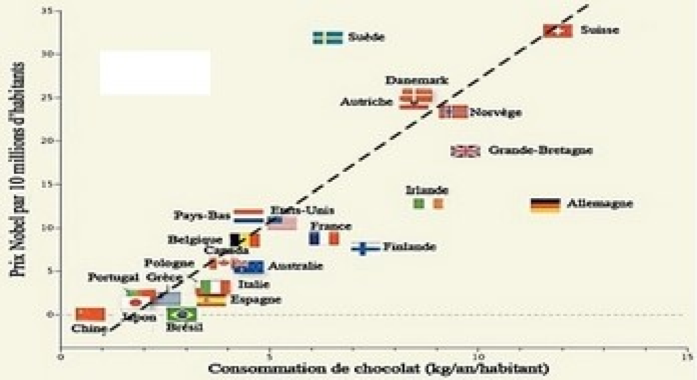
Démonstration :

Corrélation et causalité

ATTENTION : La corrélation n'implique pas la causalité. Les deux Variables Aléatoires peuvent être liées à un troisième paramètre.

ATTENTION : La corrélation n'implique pas la causalité. Les deux Variables Aléatoires peuvent être liées à un troisième paramètre.

Exemple :



Exemple : Si on appelle Y le nombre de prix Nobel pour 10 millions d'habitants dans différents pays et X la consommation de chocolat (en kg/an/habitant), le graphique précédent montre qu'on a corrélation :

Exemple : Si on appelle Y le nombre de prix Nobel pour 10 millions d'habitants dans différents pays et X la consommation de chocolat (en kg/an/habitant), le graphique précédent montre qu'on a corrélation : $Y = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Corrélation et causalité

Exemple : Si on appelle Y le nombre de prix Nobel pour 10 millions d'habitants dans différents pays et X la consommation de chocolat (en kg/an/habitant), le graphique précédent montre qu'on a corrélation : $Y = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Cependant, il n'y a pas de causalité. En effet manger du chocolat ne permet pas d'obtenir le prix Nobel. Ce qui est dommage.

Corrélation et causalité

Exemple : Si on appelle Y le nombre de prix Nobel pour 10 millions d'habitants dans différents pays et X la consommation de chocolat (en kg/an/habitant), le graphique précédent montre qu'on a corrélation : $Y = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Cependant, il n'y a pas de causalité. En effet manger du chocolat ne permet pas d'obtenir le prix Nobel. Ce qui est dommage.
En fait la richesse d'un pays mesuré par son revenu par habitant, est tout à la fois la cause de la consommation de chocolat (le chocolat est un produit de luxe, cher, d'autant plus accessible que les revenus sont élevés) et la cause du nombre de prix Nobel obtenus (un pays riche peut consacrer plus de moyens à son système éducatif pour le rendre plus performant qu'un pays pauvre).