Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

5 août 2024

I/ Généralité sur les variables aléatoires

1/ Définitions

Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé.

I/ Généralité sur les variables aléatoires

1/ Définitions

Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé.

Définition :

- Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est appelée une variable aléatoire.

I/ Généralité sur les variables aléatoires

1/ Définitions

Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé.

Définition :

- Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est appelée une variable aléatoire.
- Soit $x \in X(\Omega)$, on pose
  - $\{X = x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\})$
  - $\{X < x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\} = X^{-1}(]-\infty; x[)$
  - $\cdots$ etc

I/ Généralité sur les variables aléatoires

1/ Définitions

Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé.

Définition :

- Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est appelée une variable aléatoire.
- Soit $x \in X(\Omega)$, on pose
  - $\{X = x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\})$
  - $\{X < x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\} = X^{-1}(]-\infty; x[)$
  - $\cdots$ etc

Exemple : On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. L'univers Ω est donc l'ensemble des combinaisons de 5 cartes obtenues.

I/ Généralité sur les variables aléatoires

1/ Définitions

Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé.

Définition :

- Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est appelée une variable aléatoire.
- Soit $x \in X(\Omega)$, on pose
  - $\{X = x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\})$
  - $\{X < x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\} = X^{-1}(]-\infty; x[)$
  - $\cdots$ etc

Exemple : On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. L'univers Ω est donc l'ensemble des combinaisons de 5 cartes obtenues.

On appelle X le nombre d'as obtenu. C'est une variable aléatoire avec $X(\Omega) =$

I/ Généralité sur les variables aléatoires

1/ Définitions

Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé.

Définition :

- Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est appelée une variable aléatoire.
- Soit $x \in X(\Omega)$, on pose
  - $\{X = x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\})$
  - $\{X < x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\} = X^{-1}(]-\infty; x[)$
  - $\cdots$ etc

Exemple : On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. L'univers Ω est donc l'ensemble des combinaisons de 5 cartes obtenues.

On appelle X le nombre d'as obtenu. C'est une variable aléatoire avec $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

I/ Généralité sur les variables aléatoires

1/ Définitions

Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé.

Définition :

- Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est appelée une variable aléatoire.
- Soit $x \in X(\Omega)$, on pose
  - $\{X = x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\})$
  - $\{X < x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\} = X^{-1}(]-\infty; x[)$
  - $\cdots$ etc

Exemple : On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. L'univers Ω est donc l'ensemble des combinaisons de 5 cartes obtenues.

On appelle X le nombre d'as obtenu. C'est une variable aléatoire avec $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ et $\{X = 4\}$ est l'ensemble des combinaisons comportant un carré d'as.

Définition : Une variable aléatoire X est dite discrète si $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable

Définition : Une variable aléatoire X est dite discrète si $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable

Exemple :

1. La variable aléatoire précédente est discrète car $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ est fini

Définition : Une variable aléatoire X est dite discrète si $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable

Exemple :

1. La variable aléatoire précédente est discrète car $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ est fini
2. On tire successivement et avec remise une carte dans un jeu de 52 cartes jusqu'à tomber sur un as. On appelle Y le nombre de tirages nécessaires. C'est une variable aléatoire discrète car $Y(\Omega) =$

Définition : Une variable aléatoire X est dite discrète si $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable

Exemple :

1. La variable aléatoire précédente est discrète car $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ est fini
2. On tire successivement et avec remise une carte dans un jeu de 52 cartes jusqu'à tomber sur un as. On appelle Y le nombre de tirages nécessaires. C'est une variable aléatoire discrète car $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ est infini dénombrable

Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition : La loi d'une variable aléatoire discrète X est l'application

$$P_X : \begin{array}{l} X(\Omega) \to [0;1] \\ x \to P(X = x) \end{array}$$

Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition : La loi d'une variable aléatoire discrète X est l'application

$$P_X : \begin{array}{l} X(\Omega) \to [0;1] \\ x \to P(X = x) \end{array}$$

Exemple : Si on reprend l'exemple précédent alors

x_i	0	1	2	3	4
$P_X(x_i)$	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$

Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition : La loi d'une variable aléatoire discrète X est l'application

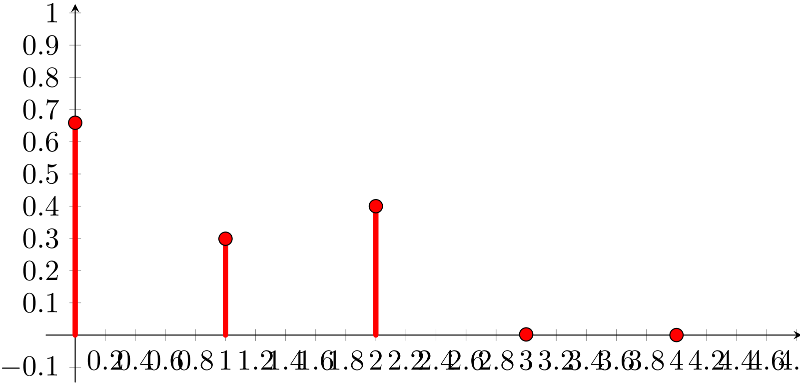
$$P_X : \begin{array}{l} X(\Omega) \to [0;1] \\ x \to P(X = x) \end{array}$$

Exemple : Si on reprend l'exemple précédent alors

x_i	0	1	2	3	4
$P_X(x_i)$	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$

Remarque : L'application P_X est une probabilité sur l'ensemble $X(\Omega)$

Histogramme



2/ Espérance

2/ Espérance

Définition : L'espérance d'une variable aléatoire X, notée $E(X)$, est la moyenne des valeurs prises par X, pondérées par la probabilité que X prenne cette valeur.

2/ Espérance

Définition : L'espérance d'une variable aléatoire X, notée $E(X)$, est la moyenne des valeurs prises par X, pondérées par la probabilité que X prenne cette valeur.

- Si $X(\Omega) = \{x_1; \cdots; x_n\}$ est fini alors
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

2/ Espérance

Définition : L'espérance d'une variable aléatoire X, notée $E(X)$, est la moyenne des valeurs prises par X, pondérées par la probabilité que X prenne cette valeur.

- Si $X(\Omega) = \{x_1; \cdots; x_n\}$ est fini alors

  $$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

- Si $X(\Omega) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est infini dénombrable alors

  $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$ si la série est absolument convergente

Exemples :

- Pour l'exemple précédent $E(X) \simeq 0,385$.
  Calculs sur le tableau à coté

Exemples :

- Pour l'exemple précédent $E(X) \simeq 0,385$.
  Calculs sur le tableau à coté
  Une main contient donc en moyenne 0,4 as.

Exemples :

- Pour l'exemple précédent $E(X) \simeq 0,385$.
  Calculs sur le tableau à coté
  Une main contient donc en moyenne 0,4 as.
- Soit X une variable aléatoire définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$

Exemples :

- Pour l'exemple précédent $E(X) \simeq 0,385$.
  Calculs sur le tableau à coté
  Une main contient donc en moyenne 0,4 as.
- Soit X une variable aléatoire définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$

Propriété : Soit X une variable aléatoire discrète dont l'espérance existe :

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$

Espérance

Exemples :

- Pour l'exemple précédent $E(X) \simeq 0,385$.
  Calculs sur le tableau à coté
  Une main contient donc en moyenne 0,4 as.
- Soit X une variable aléatoire définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n) = \frac{1}{n(n+1)}$

Propriété : Soit X une variable aléatoire discrète dont l'espérance existe :

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X=x)$
- Si $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, alors $E(aX+b) = aE(X)+b$

Exemples :

- Pour l'exemple précédent $E(X) \simeq 0,385$.
  Calculs sur le tableau à coté
  Une main contient donc en moyenne 0,4 as.
- Soit X une variable aléatoire définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$

Propriété : Soit X une variable aléatoire discrète dont l'espérance existe :

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors $E(f(X)) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$
- Si $(a; b) \in \mathbb{R}^2$, alors $E(aX + b) = aE(X) + b$

Démonstration :

Propriété : Soit X une variable aléatoire discrète et positive, c'est à dire $X(\omega) \geqslant 0, \forall \omega \in \Omega$:

- $E(X) \geqslant 0$
- $E(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = 0) = 1$ et dans ce cas on dit que X est presque sûrement nulle

3/ Variance

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

3/ Variance

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- La variance de X est $V(X) = E((X - E(X))^2)$

3/ Variance

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- La variance de X est $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

3/ Variance

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- La variance de X est $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : La variance et l'écart type permettent de savoir si les valeurs d'une variable aléatoire sont dispersées ou regroupées autour de l'espérance

3/ Variance

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- La variance de X est $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : La variance et l'écart type permettent de savoir si les valeurs d'une variable aléatoire sont dispersées ou regroupées autour de l'espérance

Propriétés : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

3/ Variance

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- La variance de X est $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : La variance et l'écart type permettent de savoir si les valeurs d'une variable aléatoire sont dispersées ou regroupées autour de l'espérance

Propriétés : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- $V(X) \geqslant 0$

3/ Variance

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- La variance de X est $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : La variance et l'écart type permettent de savoir si les valeurs d'une variable aléatoire sont dispersées ou regroupées autour de l'espérance

Propriétés : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- $V(X) \geqslant 0$
- $V(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = E(X)) = 1$

3/ Variance

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- La variance de X est $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : La variance et l'écart type permettent de savoir si les valeurs d'une variable aléatoire sont dispersées ou regroupées autour de l'espérance

Propriétés : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- $V(X) \geqslant 0$
- $V(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = E(X)) = 1$
- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

3/ Variance

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- La variance de X est $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : La variance et l'écart type permettent de savoir si les valeurs d'une variable aléatoire sont dispersées ou regroupées autour de l'espérance

Propriétés : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- $V(X) \geqslant 0$
- $V(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = E(X)) = 1$
- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- Si $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ alors $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Exemple : Pour l'exemple précédent

x_i	0	1	2	3	4
$P_X(x_i)$	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$

Propriétés de la variance

Exemple : Pour l'exemple précédent

x_i	0	1	2	3	4
$P_X(x_i)$	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$

$E(X) \simeq 0,385$

Propriétés de la variance

Exemple : Pour l'exemple précédent

x_i	0	1	2	3	4
$P_X(x_i)$	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$

$E(X) \simeq 0,385$

x_i^2	$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	total
P	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$	1

Propriétés de la variance

Exemple : Pour l'exemple précédent

x_i	0	1	2	3	4
$P_X(x_i)$	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$

$E(X) \simeq 0,385$

x_i^2	$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	total
P	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$	1

On a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Propriétés de la variance

Exemple : Pour l'exemple précédent

x_i	0	1	2	3	4
$P_X(x_i)$	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$

$E(X) \simeq 0,385$

x_i^2	$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	total
P	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$	1

On a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$V(X) \simeq$

$0\times 0,659 + 1\times 0,299 + 4\times 0,04 + 9\times 0,002 + 16\times 10^{-5} - 0,385^2$

Propriétés de la variance

Exemple : Pour l'exemple précédent

x_i	0	1	2	3	4
$P_X(x_i)$	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$

$E(X) \simeq 0,385$

x_i^2	$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	total
P	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$	1

On a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$V(X) \simeq$

$0\times 0,659 + 1\times 0,299 + 4\times 0,04 + 9\times 0,002 + 16\times 10^{-5} - 0,385^2$

$V(X) \simeq 0,47716 - 0,148225 = 0,328935$

4/ Fonction de répartition

4/ Fonction de répartition

Définition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est la fonction F_X : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to P(X \leqslant x) \end{array}$

4/ Fonction de répartition

Définition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est la fonction F_X : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to P(X \leqslant x) \end{array}$

Exemple : Dans l'exemple précédent, on a :

4/ Fonction de répartition

Définition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est la fonction F_X : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to P(X \leqslant x) \end{array}$

Exemple : Dans l'exemple précédent, on a :

- $\forall\ x < 0, F_X(x) = P(X \leqslant x) = 0$

4/ Fonction de répartition

Définition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est la fonction F_X : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to P(X \leqslant x) \end{array}$

Exemple : Dans l'exemple précédent, on a :

- $\forall\ x < 0, F_X(x) = P(X \leqslant x) = 0$
- $\forall\ 0 \leqslant x < 1, F_X(x) = P(X = 0) = 0,659$

4/ Fonction de répartition

Définition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est la fonction F_X : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to P(X \leqslant x) \end{array}$

Exemple : Dans l'exemple précédent, on a :

- $\forall\ x < 0, F_X(x) = P(X \leqslant x) = 0$
- $\forall\ 0 \leqslant x < 1, F_X(x) = P(X = 0) = 0,659$
- $\forall\ 1 \leqslant x < 2, F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,958$

4/ Fonction de répartition

Définition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est la fonction $F_X : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to P(X \leqslant x) \end{array}$

Exemple : Dans l'exemple précédent, on a :

- $\forall\ x < 0, F_X(x) = P(X \leqslant x) = 0$
- $\forall\ 0 \leqslant x < 1, F_X(x) = P(X = 0) = 0,659$
- $\forall\ 1 \leqslant x < 2, F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,958$
- $\forall\ 2 \leqslant x < 3, F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1)$
  $+P(X = 2) = 0,998$

4/ Fonction de répartition

Définition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est la fonction $F_X : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to P(X \leqslant x) \end{array}$

Exemple : Dans l'exemple précédent, on a :

- $\forall\ x < 0, F_X(x) = P(X \leqslant x) = 0$
- $\forall\ 0 \leqslant x < 1, F_X(x) = P(X = 0) = 0,659$
- $\forall\ 1 \leqslant x < 2, F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,958$
- $\forall\ 2 \leqslant x < 3, F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1)$
  $+P(X = 2) = 0,998$
- $\forall\ 3 \leqslant x < 4, F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1)$
  $+P(X = 2) + P(X = 3) = 0,99999$

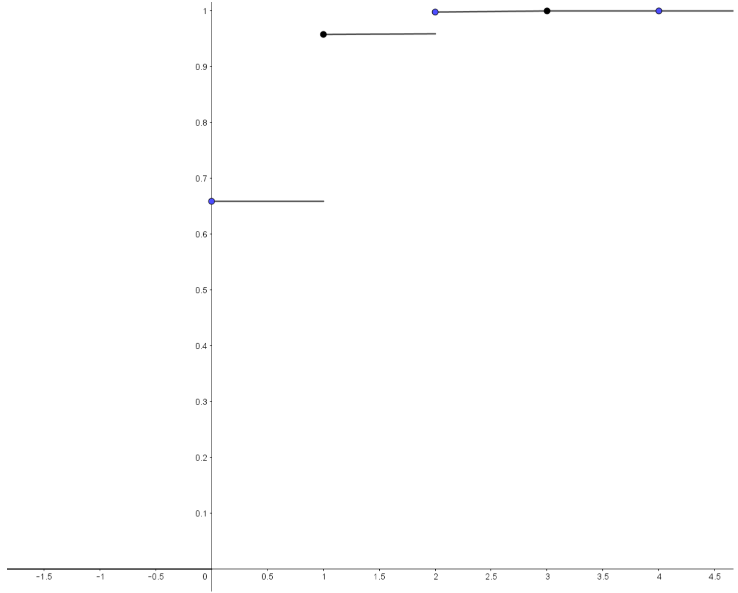
4/ Fonction de répartition

Définition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est la fonction F_X : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to P(X \leqslant x) \end{array}$

Exemple : Dans l'exemple précédent, on a :

- $\forall\ x < 0, F_X(x) = P(X \leqslant x) = 0$
- $\forall\ 0 \leqslant x < 1, F_X(x) = P(X = 0) = 0,659$
- $\forall\ 1 \leqslant x < 2, F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,958$
- $\forall\ 2 \leqslant x < 3, F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1)$ $+P(X = 2) = 0,998$
- $\forall\ 3 \leqslant x < 4, F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1)$ $+P(X = 2) + P(X = 3) = 0,99999$
- $\forall\ x \geqslant 4, F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1)$ $+P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1$

Fonction de répartition



Propriétés de la fonction de répartition

Propriété : Soit X une variable aléatoire discrète :

Propriété : Soit X une variable aléatoire discrète :

- $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0; 1]$

Propriétés de la fonction de répartition

Propriété : Soit X une variable aléatoire discrète :

- $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0;1]$
- La fonction de répartition F_X est croissante et en escalier.

Propriétés de la fonction de répartition

Propriété : Soit X une variable aléatoire discrète :

- $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0;1]$
- La fonction de répartition F_X est croissante et en escalier.
- Si a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$ alors $P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$

Propriétés de la fonction de répartition

Propriété : Soit X une variable aléatoire discrète :

- $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0;1]$
- La fonction de répartition F_X est croissante et en escalier.
- Si a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$ alors $P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Propriétés de la fonction de répartition

Propriété : Soit X une variable aléatoire discrète :

- $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0;1]$
- La fonction de répartition F_X est croissante et en escalier.
- Si a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$ alors $P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- $\lim_{t \to x, t > x} F_X(t) = F_X(x)$, on dit que F_X est continue à droite

Propriétés de la fonction de répartition

Propriété : Soit X une variable aléatoire discrète :

- $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0;1]$
- La fonction de répartition F_X est croissante et en escalier.
- Si a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$ alors $P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- $\lim\limits_{t \to x, t > x} F_X(t) = F_X(x)$, on dit que F_X est continue à droite
- $P(X = x) = F_X(x) - \lim\limits_{t \to x, t < x} F_X(t)$

Remarques :

- On peut retrouver la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition

Remarques :

- On peut retrouver la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition
- Deux variables aléatoires qui ont la même fonction de répartition, ont la même loi

Remarques :

- On peut retrouver la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition
- Deux variables aléatoires qui ont la même fonction de répartition, ont la même loi

Exemple : Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est définie par
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{3} \text{ si } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[\\ \frac{8}{15} \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right[\\ \frac{9}{15} \text{ si } x \in \left[2; \frac{7}{2}\right[\\ 1 \text{ si } x \in \left[\frac{7}{2}; +\infty\right[\end{cases}$$

Remarques :

- On peut retrouver la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition
- Deux variables aléatoires qui ont la même fonction de répartition, ont la même loi

Exemple : Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est définie par $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{3} \text{ si } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[\\ \frac{8}{15} \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right[\\ \frac{9}{15} \text{ si } x \in \left[2; \frac{7}{2}\right[\\ 1 \text{ si } x \in \left[\frac{7}{2}; +\infty\right[\end{cases}$

On a donc $X(\Omega) = \left\{0; \frac{1}{2}; 2; \frac{7}{2}\right\}$

Loi d'une variable aléatoire et fonction de répartition

Remarques :

- On peut retrouver la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition
- Deux variables aléatoires qui ont la même fonction de répartition, ont la même loi

Exemple : Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est définie par
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{3} \text{ si } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[\\ \frac{8}{15} \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right[\\ \frac{9}{15} \text{ si } x \in \left[2; \frac{7}{2}\right[\\ 1 \text{ si } x \in \left[\frac{7}{2}; +\infty\right[\end{cases}$$

On a donc $X(\Omega) = \left\{0; \frac{1}{2}; 2; \frac{7}{2}\right\}$ et

x_i	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{7}{2}$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15} - \frac{1}{3} = \frac{3}{15}$	$\frac{9}{15} - \frac{8}{15} = \frac{1}{15}$	$1 - \frac{9}{15} = \frac{6}{15}$

ATTENTION : Deux variables aléatoires peuvent être différentes et avoir la même loi.

Exemple : Soit X une variable aléatoire de loi

x_i	-1	1	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

La variable $-X$ a de façon évidente la même loi et pourtant $X \neq -X$ car $X \neq 0$

II/ Lois usuelles

1/ Loi uniforme

II/ Lois usuelles

1/ Loi uniforme

Définition : Soient $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ avec $a < b$, une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![a;b]\!]$, notée $\mathcal{U}([\![a;b]\!])$, si $X(\Omega) = [\![a;b]\!]$ et $\forall n \in [\![a;b]\!], P(X = n) = \frac{1}{b-a+1}$

II/ Lois usuelles

1/ Loi uniforme

Définition : Soient $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ avec $a < b$, une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![a;b]\!]$, notée $\mathcal{U}([\![a;b]\!])$, si $X(\Omega) = [\![a;b]\!]$ et $\forall n \in [\![a;b]\!], P(X = n) = \frac{1}{b-a+1}$

Remarque : La loi uniforme est utilisée pour une situation d'équiprobabilité

II/ Lois usuelles

1/ Loi uniforme

Définition : Soient $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ avec $a < b$, une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![a; b]\!]$, notée $\mathcal{U}([\![a; b]\!])$, si $X(\Omega) = [\![a; b]\!]$ et $\forall n \in [\![a; b]\!], P(X = n) = \frac{1}{b-a+1}$

Remarque : La loi uniforme est utilisée pour une situation d'équiprobabilité

Démonstration : Dans $[\![a; b]\!]$, on a $b - a + 1$ valeurs. en cas d'équiprobabilité, chaque résultat a donc une probabilité $\frac{1}{b-a+1}$

II/ Lois usuelles

1/ Loi uniforme

Définition : Soient $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ avec $a < b$, une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![a;b]\!]$, notée $\mathcal{U}([\![a;b]\!])$, si $X(\Omega) = [\![a;b]\!]$ et $\forall n \in [\![a;b]\!], P(X = n) = \frac{1}{b-a+1}$

Remarque : La loi uniforme est utilisée pour une situation d'équiprobabilité

Démonstration : Dans $[\![a;b]\!]$, on a $b - a + 1$ valeurs. en cas d'équiprobabilité, chaque résultat a donc une probabilité $\frac{1}{b-a+1}$

Propriété : Si une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[\![a;b]\!]$ alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}$

2/ Loi de Bernoulli

Définition : Soit $p \in]0;1[$, une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, notée $\mathcal{B}(1,p)$, si $X(\Omega) = \{0;1\}$, $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$

2/ Loi de Bernoulli

Définition : Soit $p \in]0;1[$, une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, notée $\mathcal{B}(1,p)$, si $X(\Omega) = \{0;1\}$, $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$

Remarque : Une loi de Bernoulli modélise une expérience (dite de Bernoulli) avec deux résultats possibles : le succès de probabilité p et l'échec de probabilité $1-p$

2/ Loi de Bernoulli

Définition : Soit $p \in]0;1[$, une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, notée $\mathcal{B}(1,p)$, si $X(\Omega) = \{0;1\}$, $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$

Remarque : Une loi de Bernoulli modélise une expérience (dite de Bernoulli) avec deux résultats possibles : le succès de probabilité p et l'échec de probabilité $1-p$

Propriété : Si une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ avec $p \in]0;1[$, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$

2/ Loi de Bernoulli

Définition : Soit $p \in]0;1[$, une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, notée $\mathcal{B}(1,p)$, si $X(\Omega) = \{0;1\}$, $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$

Remarque : Une loi de Bernoulli modélise une expérience (dite de Bernoulli) avec deux résultats possibles : le succès de probabilité p et l'échec de probabilité $1-p$

Propriété : Si une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ avec $p \in]0;1[$, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$

Démonstration :

3/ Loi binomiale

Définition : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n;p)$ si $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\} = [\![0; n]\!]$ et $\forall k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

3/ Loi binomiale

Définition : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n;p)$ si $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\} = [\![0;n]\!]$ et $\forall k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Remarque : Pour une loi binomiale $P(\Omega) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k)$

3/ Loi binomiale

Définition : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n;p)$ si $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\} = [\![0;n]\!]$ et $\forall k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Remarque : Pour une loi binomiale $P(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)$

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$$

Application d'une loi binomiale

Remarque : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$ si et seulement si :

Application d'une loi binomiale

Remarque : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$ si et seulement si :

- On a une expérience de Bernoulli de paramètre p

Application d'une loi binomiale

Remarque : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$ si et seulement si :

- On a une expérience de Bernoulli de paramètre p
- On répète n fois et de façon indépendante cette expérience

Application d'une loi binomiale

Remarque : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$ si et seulement si :

- On a une expérience de Bernoulli de paramètre p
- On répète n fois et de façon indépendante cette expérience
- X compte le nombre de succès obtenus

Application d'une loi binomiale

Remarque : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$ si et seulement si :

- On a une expérience de Bernoulli de paramètre p
- On répète n fois et de façon indépendante cette expérience
- X compte le nombre de succès obtenus

Démonstration : $\{X = k\}$ corresponds à k succès et $(n-k)$ échecs d'où une probabilité de $p^k(1-p)^{n-k}$ pour chaque issue à cause de l'indépendance des expériences. Chaque issue est un anagramme de k succès et $n-k$ échecs. On a $\binom{n}{k}$ combinaisons possibles de ces k succès d'où $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Propriété

- Toute variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n \in NN^*$ et $p \in]0;1[$ peut être considérée comme la somme de n variables aléatoires indépendantes, X_1, X_2, ..., X_n, suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.

Propriété

- Toute variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n \in NN^*$ et $p \in]0;1[$ peut être considérée comme la somme de n variables aléatoires indépendantes, X_1, X_2, ..., X_n, suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
  C'est à dire que $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

Espérance et variance d'une loi binomiale

Propriété

- Toute variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n \in NN^*$ et $p \in]0;1[$ peut être considérée comme la somme de n variables aléatoires indépendantes, X_1, X_2, ..., X_n, suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
C'est à dire que $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$
- Si une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$ alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

Espérance et variance d'une loi binomiale

Propriété

- Toute variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n \in NN^*$ et $p \in]0;1[$ peut être considérée comme la somme de n variables aléatoires indépendantes, X_1, X_2, ..., X_n, suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
  C'est à dire que $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$
- Si une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$ alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

Démonstration :

4/ Loi géométrique

Définition : Soit $p \in]0;1[$, une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p, notée $\mathcal{G}(p)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$

4/ Loi géométrique

Définition : Soit $p \in]0;1[$, une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p, notée $\mathcal{G}(p)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$

Remarque : Une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$ modélise la répétition de façon indépendante d'une expérience de Bernoulli de paramètre p et dont on cherche la première apparition du succès. En effet le succès arrive pour la première fois au rang n si on a eu $n-1$ échecs, d'où le $(1-p)^{n-1}$, suivi d'un succès.

4/ Loi géométrique

Définition : Soit $p \in]0;1[$, une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p, notée $\mathcal{G}(p)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$

Remarque : Une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$ modélise la répétition de façon indépendante d'une expérience de Bernoulli de paramètre p et dont on cherche la première apparition du succès. En effet le succès arrive pour la première fois au rang n si on a eu $n-1$ échecs, d'où le $(1-p)^{n-1}$, suivi d'un succès.

Propriété : Si une variable aléatoire X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0;1[$ alors $E(X) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

5/ Loi de Poisson

Définition : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

5/ Loi de Poisson

Définition : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

Remarque : Avec cette loi,

$$P(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

5/ Loi de Poisson

Définition : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

Remarque : Avec cette loi,

$$P(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$P(\Omega) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \times e^{\lambda} = e^{-\lambda+\lambda} = e^0 = 1$$

5/ Loi de Poisson

Définition : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

Remarque : Avec cette loi,

$$P(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$P(\Omega) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \times e^{\lambda} = e^{-\lambda+\lambda} = e^0 = 1$$

Propriété : Si X est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$, alors $E(X) = V(X) = \lambda$

5/ Loi de Poisson

Définition : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

Remarque : Avec cette loi,

$$P(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$P(\Omega) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \times e^{\lambda} = e^{-\lambda+\lambda} = e^0 = 1$$

Propriété : Si X est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$, alors $E(X) = V(X) = \lambda$

Démonstration :

Remarque : Une loi de Poisson est utilisée pour modéliser des événements rares

Approximation d'une loi binomiale

Remarque : Une loi de Poisson est utilisée pour modéliser des événements rares

Propriété Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$ avec $n \geqslant 30$, $p \leqslant 0,1$ et $np \leqslant 15$. Si Y est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$ alors
$P(X = k) \simeq P(Y = k)$
On dit que la loi $\mathcal{P}(np)$ est une approximation de $\mathcal{B}(n,p)$

Approximation d'une loi binomiale

Remarque : Une loi de Poisson est utilisée pour modéliser des événements rares

Propriété Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$ avec $n \geqslant 30$, $p \leqslant 0,1$ et $np \leqslant 15$. Si Y est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$ alors
$P(X = k) \simeq P(Y = k)$
On dit que la loi $\mathcal{P}(np)$ est une approximation de $\mathcal{B}(n, p)$

Démonstration :

Approximation d'une loi binomiale

Remarque : Une loi de Poisson est utilisée pour modéliser des événements rares

Propriété Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$ avec $n \geqslant 30$, $p \leqslant 0,1$ et $np \leqslant 15$. Si Y est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$ alors
$P(X = k) \simeq P(Y = k)$
On dit que la loi $\mathcal{P}(np)$ est une approximation de $\mathcal{B}(n, p)$

Démonstration :

Exemple Une association de consommateurs veut étudier les probabilités de gain d'un nouveau jeu à gratter lancée par la Française Des Jeux (FDJ). Cependant cette dernière n'accepte de lui donner que le nombre moyen de billets gagnants (pour le gros lot) par jour soit 2.