Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

17 juin 2022

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

I/ Généralité sur les variables aléatoires

1/ Définitions

Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé.

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

I/ Généralité sur les variables aléatoires

1/ Définitions

Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé.

Définition :

- Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est appelée une variable aléatoire.

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

I/ Généralité sur les variables aléatoires

1/ Définitions

Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé.

Définition :

- Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est appelée une variable aléatoire.
- Soit $x \in X(\Omega)$, on pose
  - $\{X = x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\})$
  - $\{X < x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\} = X^{-1}(]-\infty; x[)$
  - $\cdots$ etc

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

I/ Généralité sur les variables aléatoires

1/ Définitions

Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé.

Définition :

- Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est appelée une variable aléatoire.
- Soit $x \in X(\Omega)$, on pose
  - $\{X = x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\})$
  - $\{X < x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\} = X^{-1}(]-\infty; x[)$
  - $\cdots$ etc

Exemple : On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. L'univers Ω est donc l'ensemble des combinaisons de 5 cartes obtenues.

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

I/ Généralité sur les variables aléatoires

1/ Définitions

Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé.

Définition :

- Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est appelée une variable aléatoire.
- Soit $x \in X(\Omega)$, on pose
  - $\{X = x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\})$
  - $\{X < x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\} = X^{-1}(]-\infty; x[)$
  - $\cdots$ etc

Exemple : On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. L'univers Ω est donc l'ensemble des combinaisons de 5 cartes obtenues.

On appelle X le nombre d'as obtenu. C'est une variable aléatoire avec $X(\Omega) =$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

I/ Généralité sur les variables aléatoires

1/ Définitions

Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé.

Définition :

- Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est appelée une variable aléatoire.
- Soit $x \in X(\Omega)$, on pose
  - $\{X = x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\})$
  - $\{X < x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\} = X^{-1}(]-\infty; x[)$
  - $\cdots$ etc

Exemple : On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. L'univers Ω est donc l'ensemble des combinaisons de 5 cartes obtenues.

On appelle X le nombre d'as obtenu. C'est une variable aléatoire avec $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

I/ Généralité sur les variables aléatoires

1/ Définitions

Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé.

Définition :

- Une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est appelée une variable aléatoire.
- Soit $x \in X(\Omega)$, on pose
  - $\{X = x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\})$
  - $\{X < x\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < x\} = X^{-1}(]-\infty; x[)$
  - $\cdots$ etc

Exemple : On tire simultanément 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. L'univers Ω est donc l'ensemble des combinaisons de 5 cartes obtenues.

On appelle X le nombre d'as obtenu. C'est une variable aléatoire avec $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ et $\{X = 4\}$ est l'ensemble des combinaisons comportant un carré d'as.

Variables aléatoires discrètes

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Définition : Une variable aléatoire X est dite discrète si $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable

Variables aléatoires discrètes

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Définition : Une variable aléatoire X est dite discrète si $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable

Exemple :

1. La variable aléatoire précédente est discrète car $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ est fini

Variables aléatoires discrètes

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Définition : Une variable aléatoire X est dite discrète si $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable

Exemple :

1. La variable aléatoire précédente est discrète car $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ est fini
2. On tire successivement et avec remise une carte dans un jeu de 52 cartes jusqu'à tomber sur un as. On appelle Y le nombre de tirages nécessaires. C'est une variable aléatoire discrète car $Y(\Omega) =$

Variables aléatoires discrètes

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Définition : Une variable aléatoire X est dite discrète si $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable

Exemple :

1. La variable aléatoire précédente est discrète car $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ est fini
2. On tire successivement et avec remise une carte dans un jeu de 52 cartes jusqu'à tomber sur un as. On appelle Y le nombre de tirages nécessaires. C'est une variable aléatoire discrète car $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ est infini dénombrable

Loi d'une variable aléatoire discrète

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Définition : La loi d'une variable aléatoire discrète X est l'application

$$P_X : \begin{array}{l} X(\Omega) \to [0;1] \\ x \to P(X = x) \end{array}$$

Loi d'une variable aléatoire discrète

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Définition : La loi d'une variable aléatoire discrète X est l'application

$$P_X : \begin{array}{l} X(\Omega) \to [0;1] \\ x \to P(X = x) \end{array}$$

Exemple : Si on reprend l'exemple précédent alors

x_i	0	1	2	3	4
$P_X(x_i)$	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$

Loi d'une variable aléatoire discrète

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Définition : La loi d'une variable aléatoire discrète X est l'application

$$P_X : \begin{array}{l} X(\Omega) \to [0;1] \\ x \to P(X = x) \end{array}$$

Exemple : Si on reprend l'exemple précédent alors

x_i	0	1	2	3	4
$P_X(x_i)$	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$

Remarque : L'application P_X est une probabilité sur l'ensemble $X(\Omega)$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

2/ Espérance

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

2/ Espérance

Définition : L'espérance d'une variable aléatoire X, notée $E(X)$, est la moyenne des valeurs prises par X, pondérées par la probabilité que X prenne cette valeur.

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

2/ Espérance

Définition : L'espérance d'une variable aléatoire X, notée $E(X)$, est la moyenne des valeurs prises par X, pondérées par la probabilité que X prenne cette valeur.

- Si $X(\Omega) = \{x_1; \cdots; x_n\}$ est fini alors

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

2/ Espérance

Définition : L'espérance d'une variable aléatoire X, notée $E(X)$, est la moyenne des valeurs prises par X, pondérées par la probabilité que X prenne cette valeur.

- Si $X(\Omega) = \{x_1; \cdots; x_n\}$ est fini alors
  $$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$
- Si $X(\Omega) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est infini dénombrable alors
  $$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$$ si la série est absolument convergente

Espérance

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Exemples :

- Pour l'exemple précédent $E(X) \simeq 0,385$.
  Calculs sur le tableau à coté

Espérance

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Exemples :

- Pour l'exemple précédent $E(X) \simeq 0,385$.
  Calculs sur le tableau à coté
  Une main contient donc en moyenne 0,4 as.

Espérance

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Exemples :

- Pour l'exemple précédent $E(X) \simeq 0,385$.
  Calculs sur le tableau à coté
  Une main contient donc en moyenne 0,4 as.
- Soit X une variable aléatoire définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$

Espérance

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Exemples :

- Pour l'exemple précédent $E(X) \simeq 0,385$.
  Calculs sur le tableau à coté
  Une main contient donc en moyenne 0,4 as.
- Soit X une variable aléatoire définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$

Propriété : Soit X une variable aléatoire discrète dont l'espérance existe :

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$
- Si $(a; b) \in \mathbb{R}^2$, alors $E(aX + b) = aE(X) + b$

Variables aléatoires discrètes et positives

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Propriété : Soit X une variable aléatoire discrète et positive, c'est à dire $X(\omega) \geqslant 0, \forall \omega \in \Omega$:

- $E(X) \geqslant 0$
- $E(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = 0) = 1$ et dans ce cas on dit que X est presque sûrement nulle

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

3/ Variance

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

3/ Variance

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- La variance de X est $V(X) = E((X - E(X))^2)$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

3/ Variance

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- La variance de X est $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

3/ Variance

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- La variance de X est $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : La variance et l'écart type permettent de savoir si les valeurs d'une variable aléatoire sont dispersées ou regroupées autour de l'espérance

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

3/ Variance

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- La variance de X est $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : La variance et l'écart type permettent de savoir si les valeurs d'une variable aléatoire sont dispersées ou regroupées autour de l'espérance

Propriétés : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

3/ Variance

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- La variance de X est $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : La variance et l'écart type permettent de savoir si les valeurs d'une variable aléatoire sont dispersées ou regroupées autour de l'espérance

Propriétés : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- $V(X) \geqslant 0$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

3/ Variance

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- La variance de X est $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : La variance et l'écart type permettent de savoir si les valeurs d'une variable aléatoire sont dispersées ou regroupées autour de l'espérance

Propriétés : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- $V(X) \geqslant 0$
- $V(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = E(X)) = 1$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

3/ Variance

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- La variance de X est $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : La variance et l'écart type permettent de savoir si les valeurs d'une variable aléatoire sont dispersées ou regroupées autour de l'espérance

Propriétés : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- $V(X) \geqslant 0$
- $V(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = E(X)) = 1$
- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

3/ Variance

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- La variance de X est $V(X) = E((X - E(X))^2)$
- L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque : La variance et l'écart type permettent de savoir si les valeurs d'une variable aléatoire sont dispersées ou regroupées autour de l'espérance

Propriétés : Soit X une variable aléatoire discrète telle que $E(X^2)$ existe :

- $V(X) \geqslant 0$
- $V(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = E(X)) = 1$
- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- Si $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ alors $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Propriétés de la variance

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Exemple : Pour l'exemple précédent

x_i	0	1	2	3	4
$P_X(x_i)$	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$

Propriétés de la variance

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Exemple : Pour l'exemple précédent

x_i	0	1	2	3	4
$P_X(x_i)$	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$

$E(X) \simeq 0,385$

Propriétés de la variance

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Exemple : Pour l'exemple précédent

x_i	0	1	2	3	4
$P_X(x_i)$	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$

$E(X) \simeq 0,385$

x_i^2	$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	total
P	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$	1

Propriétés de la variance

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Exemple : Pour l'exemple précédent

x_i	0	1	2	3	4
$P_X(x_i)$	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$

$E(X) \simeq 0,385$

x_i^2	$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	total
P	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$	1

On a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Propriétés de la variance

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Exemple : Pour l'exemple précédent

x_i	0	1	2	3	4
$P_X(x_i)$	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$

$E(X) \simeq 0,385$

x_i^2	$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	total
P	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$	1

On a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$V(X) \simeq$

$0\times 0,659 + 1\times 0,299 + 4\times 0,04 + 9\times 0,002 + 16\times 10^{-5} - 0,385^2$

Propriétés de la variance

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Exemple : Pour l'exemple précédent

x_i	0	1	2	3	4
$P_X(x_i)$	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$

$E(X) \simeq 0,385$

x_i^2	$0^2 = 0$	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	total
P	$\frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0,659$	$\frac{4\times\binom{48}{4}}{\binom{52}{5}} = 0,299$	$\frac{\binom{4}{2}\times\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0,040$	$\frac{\binom{4}{3}\times\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,002$	$\frac{48}{\binom{52}{5}} = 10^{-5}$	1

On a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$V(X) \simeq$

$0\times 0,659 + 1\times 0,299 + 4\times 0,04 + 9\times 0,002 + 16\times 10^{-5} - 0,385^2$

$V(X) \simeq 0,47716 - 0,148225 = 0,328935$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

4/ Fonction de répartition

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

4/ Fonction de répartition

Définition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est la fonction $F_X : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to P(X \leqslant x) \end{array}$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

4/ Fonction de répartition

Définition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est la fonction $F_X : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to P(X \leqslant x) \end{array}$

Exemple : Dans l'exemple précédent, on a :

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

4/ Fonction de répartition

Définition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est la fonction $F_X : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to P(X \leqslant x) \end{array}$

Exemple : Dans l'exemple précédent, on a :

- $\forall\ x < 0, F_X(x) = P(X \leqslant x) = 0$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

4/ Fonction de répartition

Définition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est la fonction $F_X : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to P(X \leqslant x) \end{array}$

Exemple : Dans l'exemple précédent, on a :

- $\forall\ x < 0, F_X(x) = P(X \leqslant x) = 0$
- $\forall\ 0 \leqslant x < 1, F_X(x) = P(X = 0) = 0,659$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

4/ Fonction de répartition

Définition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est la fonction $F_X : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to P(X \leqslant x) \end{array}$

Exemple : Dans l'exemple précédent, on a :

- $\forall\ x < 0, F_X(x) = P(X \leqslant x) = 0$
- $\forall\ 0 \leqslant x < 1, F_X(x) = P(X = 0) = 0,659$
- $\forall\ 1 \leqslant x < 2, F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,958$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

4/ Fonction de répartition

Définition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est la fonction $F_X : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to P(X \leqslant x) \end{array}$

Exemple : Dans l'exemple précédent, on a :

- $\forall\ x < 0, F_X(x) = P(X \leqslant x) = 0$
- $\forall\ 0 \leqslant x < 1, F_X(x) = P(X = 0) = 0,659$
- $\forall\ 1 \leqslant x < 2, F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,958$
- $\forall\ 2 \leqslant x < 3, F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1)$ $+P(X = 2) = 0,998$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

4/ Fonction de répartition

Définition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est la fonction $F_X : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to P(X \leqslant x) \end{array}$

Exemple : Dans l'exemple précédent, on a :

- $\forall\ x < 0, F_X(x) = P(X \leqslant x) = 0$
- $\forall\ 0 \leqslant x < 1, F_X(x) = P(X = 0) = 0,659$
- $\forall\ 1 \leqslant x < 2, F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,958$
- $\forall\ 2 \leqslant x < 3, F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1)$ $+P(X = 2) = 0,998$
- $\forall\ 3 \leqslant x < 4, F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1)$ $+P(X = 2) + P(X = 3) = 0,99999$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

4/ Fonction de répartition

Définition : La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X est la fonction $F_X : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to P(X \leqslant x) \end{array}$

Exemple : Dans l'exemple précédent, on a :

- $\forall\ x < 0, F_X(x) = P(X \leqslant x) = 0$
- $\forall\ 0 \leqslant x < 1, F_X(x) = P(X = 0) = 0,659$
- $\forall\ 1 \leqslant x < 2, F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,958$
- $\forall\ 2 \leqslant x < 3, F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1)$ $+P(X = 2) = 0,998$
- $\forall\ 3 \leqslant x < 4, F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1)$ $+P(X = 2) + P(X = 3) = 0,99999$
- $\forall\ x \geqslant 4, F_X(x) = P(X = 0) + P(X = 1)$ $+P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1$

Fonction de répartition

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

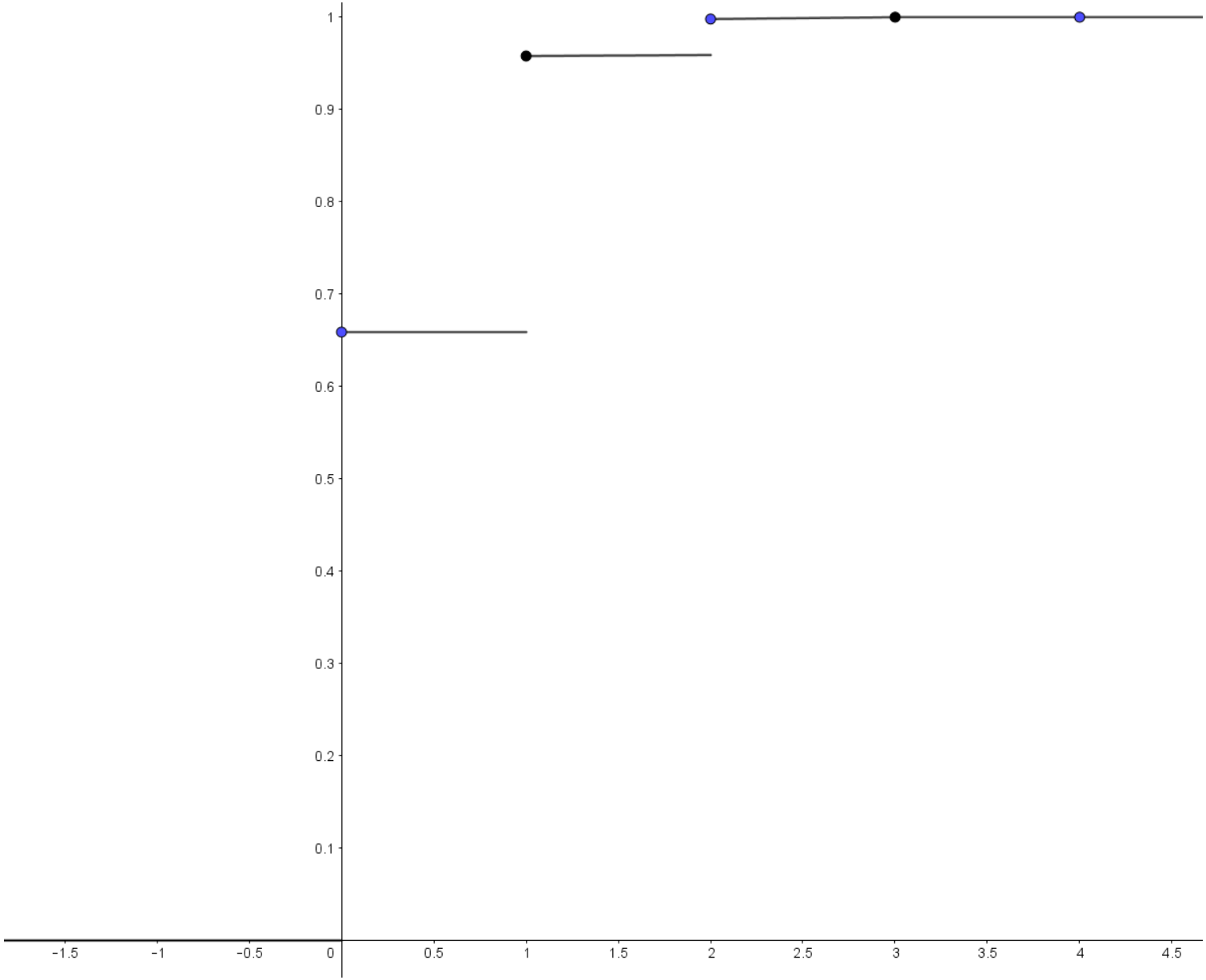
Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique



Propriétés de la fonction de répartition

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Propriété : Soit X une variable aléatoire discrète :

Propriétés de la fonction de répartition

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Propriété : Soit X une variable aléatoire discrète :

- $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0;1]$

Propriétés de la fonction de répartition

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Propriété : Soit X une variable aléatoire discrète :

- $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0;1]$
- La fonction de répartition F_X est croissante et en escalier.

Propriétés de la fonction de répartition

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Propriété : Soit X une variable aléatoire discrète :

- $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0;1]$
- La fonction de répartition F_X est croissante et en escalier.
- Si a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$ alors $P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$

Propriétés de la fonction de répartition

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Propriété : Soit X une variable aléatoire discrète :

- $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0;1]$
- La fonction de répartition F_X est croissante et en escalier.
- Si a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$ alors $P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

Propriétés de la fonction de répartition

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Propriété : Soit X une variable aléatoire discrète :

- $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0;1]$
- La fonction de répartition F_X est croissante et en escalier.
- Si a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$ alors $P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- $\lim\limits_{t \to x, t > x} F_X(t) = F_X(x)$, on dit que F_X est continue à droite

Propriétés de la fonction de répartition

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Propriété : Soit X une variable aléatoire discrète :

- $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0;1]$
- La fonction de répartition F_X est croissante et en escalier.
- Si a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$ alors $P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- $\lim\limits_{t \to x, t > x} F_X(t) = F_X(x)$, on dit que F_X est continue à droite
- $P(X = x) = F_X(x) - \lim\limits_{t \to x, t < x} F_X(t)$

Loi d'une variable aléatoire et fonction de répartition

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Remarques :

- On peut retrouver la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition

Loi d'une variable aléatoire et fonction de répartition

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Remarques :

- On peut retrouver la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition
- Deux variables aléatoires qui ont la même fonction de répartition, ont la même loi

Loi d'une variable aléatoire et fonction de répartition

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Remarques :

- On peut retrouver la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition
- Deux variables aléatoires qui ont la même fonction de répartition, ont la même loi

Exemple : Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est définie par $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{3} \text{ si } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[\\ \frac{8}{15} \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right[\\ \frac{9}{15} \text{ si } x \in \left[2; \frac{7}{2}\right[\\ 1 \text{ si } x \in \left[\frac{7}{2}; +\infty\right[\end{cases}$

Loi d'une variable aléatoire et fonction de répartition

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Remarques :

- On peut retrouver la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition
- Deux variables aléatoires qui ont la même fonction de répartition, ont la même loi

Exemple : Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est définie par $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{3} \text{ si } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[\\ \frac{8}{15} \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right[\\ \frac{9}{15} \text{ si } x \in \left[2; \frac{7}{2}\right[\\ 1 \text{ si } x \in \left[\frac{7}{2}; +\infty\right[\end{cases}$

On a donc $X(\Omega) = \left\{0; \frac{1}{2}; 2; \frac{7}{2}\right\}$

Loi d'une variable aléatoire et fonction de répartition

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Remarques :

- On peut retrouver la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition
- Deux variables aléatoires qui ont la même fonction de répartition, ont la même loi

Exemple : Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est définie par $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{3} \text{ si } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[\\ \frac{8}{15} \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right[\\ \frac{9}{15} \text{ si } x \in \left[2; \frac{7}{2}\right[\\ 1 \text{ si } x \in \left[\frac{7}{2}; +\infty\right[\end{cases}$

On a donc $X(\Omega) = \left\{0; \frac{1}{2}; 2; \frac{7}{2}\right\}$ et

x_i	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{7}{2}$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15} - \frac{1}{3} = \frac{3}{15}$	$\frac{9}{15} - \frac{8}{15} = \frac{1}{15}$	$1 - \frac{9}{15} = \frac{6}{15}$

Loi d'une variable aléatoire et fonction de répartition

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

ATTENTION : Deux variables aléatoires peuvent être différentes et avoir la même loi.

Exemple : Soit X une variable aléatoire de loi

x_i	-1	1	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

La variable $-X$ a de façon évidente la même loi et pourtant $X \neq -X$ car $X \neq 0$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

II/ Lois usuelles

1/ Loi uniforme

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

II/ Lois usuelles

1/ Loi uniforme

Définition : Soient $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ avec $a < b$, une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![a;b]\!]$, notée $\mathcal{U}([\![a;b]\!])$, si $X(\Omega) = [\![a;b]\!]$ et $\forall n \in [\![a;b]\!], P(X = n) = \frac{1}{b-a+1}$

Loi uniforme

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

II/ Lois usuelles

1/ Loi uniforme

Définition : Soient $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ avec $a < b$, une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![a;b]\!]$, notée $\mathcal{U}([\![a;b]\!])$, si $X(\Omega) = [\![a;b]\!]$ et $\forall n \in [\![a;b]\!], P(X = n) = \frac{1}{b-a+1}$

Remarque : La loi uniforme est utilisée pour une situation d'équiprobabilité

Loi uniforme

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

II/ Lois usuelles

1/ Loi uniforme

Définition : Soient $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ avec $a < b$, une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![a;b]\!]$, notée $\mathcal{U}([\![a;b]\!])$, si $X(\Omega) = [\![a;b]\!]$ et $\forall n \in [\![a;b]\!], P(X = n) = \frac{1}{b-a+1}$

Remarque : La loi uniforme est utilisée pour une situation d'équiprobabilité

Démonstration : Dans $[\![a;b]\!]$, on a $b - a + 1$ valeurs. en cas d'équiprobabilité, chaque résultat a donc une probabilité $\frac{1}{b-a+1}$

Loi uniforme

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

II/ Lois usuelles

1/ Loi uniforme

Définition : Soient $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ avec $a < b$, une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[\![a;b]\!]$, notée $\mathcal{U}([\![a;b]\!])$, si $X(\Omega) = [\![a;b]\!]$ et $\forall n \in [\![a;b]\!], P(X = n) = \frac{1}{b-a+1}$

Remarque : La loi uniforme est utilisée pour une situation d'équiprobabilité

Démonstration : Dans $[\![a;b]\!]$, on a $b - a + 1$ valeurs. en cas d'équiprobabilité, chaque résultat a donc une probabilité $\frac{1}{b-a+1}$

Propriété : Si une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[\![a;b]\!]$ alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

2/ Loi de Bernoulli

Définition : Soit $p \in]0;1[$, une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, notée $\mathcal{B}(1,p)$, si $X(\Omega) = \{0;1\}$, $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

2/ Loi de Bernoulli

Définition : Soit $p \in]0;1[$, une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, notée $\mathcal{B}(1,p)$, si $X(\Omega) = \{0;1\}$, $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$

Remarque : Une loi de Bernoulli modélise une expérience (dite de Bernoulli) avec deux résultats possibles : le succès de probabilité p et l'échec de probabilité $1-p$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

2/ Loi de Bernoulli

Définition : Soit $p \in]0;1[$, une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, notée $\mathcal{B}(1,p)$, si $X(\Omega) = \{0;1\}$, $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$

Remarque : Une loi de Bernoulli modélise une expérience (dite de Bernoulli) avec deux résultats possibles : le succès de probabilité p et l'échec de probabilité $1-p$

Propriété : Si une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ avec $p \in]0;1[$, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

2/ Loi de Bernoulli

Définition : Soit $p \in]0;1[$, une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, notée $\mathcal{B}(1,p)$, si $X(\Omega) = \{0;1\}$, $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$

Remarque : Une loi de Bernoulli modélise une expérience (dite de Bernoulli) avec deux résultats possibles : le succès de probabilité p et l'échec de probabilité $1-p$

Propriété : Si une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$ avec $p \in]0;1[$, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$

Démonstration :

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

3/ Loi binomiale

Définition : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n;p)$ si $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\} = [\![0;n]\!]$ et $\forall k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

3/ Loi binomiale

Définition : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n;p)$ si $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\} = [\![0;n]\!]$ et $\forall k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Remarques :

- $\{X = k\}$ corresponds à k succès et $(n-k)$ échec d'où $p^k(1-p)^{n-k}$ à cause de l'indépendance des expériences. de plus on $\binom{n}{k}$ combinaisons possibles de ces k succès d'où $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

3/ Loi binomiale

Définition : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n;p)$ si $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\} = [\![0;n]\!]$ et $\forall k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Remarques :

- $\{X = k\}$ corresponds à k succès et $(n-k)$ échec d'où $p^k(1-p)^{n-k}$ à cause de l'indépendance des expériences. de plus on $\binom{n}{k}$ combinaisons possibles de ces k succès d'où $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$ si et seulement si :

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

3/ Loi binomiale

Définition : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n;p)$ si $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\} = [\![0;n]\!]$ et $\forall k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Remarques :

- $\{X = k\}$ corresponds à k succès et $(n-k)$ échec d'où $p^k(1-p)^{n-k}$ à cause de l'indépendance des expériences. de plus on $\binom{n}{k}$ combinaisons possibles de ces k succès d'où $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$ si et seulement si :
  - On a une expérience de Bernoulli de paramètre p

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

3/ Loi binomiale

Définition : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n;p)$ si $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\} = [\![0;n]\!]$ et $\forall k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Remarques :

- $\{X = k\}$ corresponds à k succès et $(n-k)$ échec d'où $p^k(1-p)^{n-k}$ à cause de l'indépendance des expériences. de plus on $\binom{n}{k}$ combinaisons possibles de ces k succès d'où $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$ si et seulement si :
  - On a une expérience de Bernoulli de paramètre p
  - On répète n fois et de façon indépendante cette expérience

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

3/ Loi binomiale

Définition : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n;p)$ si $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n\} = [\![0;n]\!]$ et $\forall k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Remarques :

- $\{X = k\}$ corresponds à k succès et $(n-k)$ échec d'où $p^k(1-p)^{n-k}$ à cause de l'indépendance des expériences. de plus on $\binom{n}{k}$ combinaisons possibles de ces k succès d'où $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$ si et seulement si :
  - On a une expérience de Bernoulli de paramètre p
  - On répète n fois et de façon indépendante cette expérience
  - X compte le nombre de succès obtenus

Loi binomiale

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Remarque :

Pour une loi binomiale $P(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)$

Loi binomiale

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Remarque :

Pour une loi binomiale $P(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)$

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$$

d'après le binôme de Newton

Loi binomiale

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Remarque :

Pour une loi binomiale $P(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)$

$$P(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$$

d'après le binôme de Newton

Propriété : Si une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$ alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

Loi géométrique

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

4/ Loi géométrique

Définition : Soit $p \in]0;1[$, une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p, notée $\mathcal{G}(p)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$

Loi géométrique

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

4/ Loi géométrique

Définition : Soit $p \in]0;1[$, une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p, notée $\mathcal{G}(p)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$

Remarque : Une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$ modélise la répétition de façon indépendante d'une expérience de Bernoulli de paramètre p et dont on cherche la première apparition du succès. En effet le succès arrive pour la première fois au rang n si on a eu $n-1$ échecs, d'où le $(1-p)^{n-1}$, suivi d'un succès.

Loi géométrique

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

4/ Loi géométrique

Définition : Soit $p \in]0;1[$, une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p, notée $\mathcal{G}(p)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$

Remarque : Une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$ modélise la répétition de façon indépendante d'une expérience de Bernoulli de paramètre p et dont on cherche la première apparition du succès. En effet le succès arrive pour la première fois au rang n si on a eu $n-1$ échecs, d'où le $(1-p)^{n-1}$, suivi d'un succès.

Propriété : Si une variable aléatoire X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0;1[$ alors $E(X) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

5/ Loi de Poisson

Définition : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires

Définition

Espérance

Variance

Fonction de répartition

Lois usuelles

Loi uniforme

Loi de Bernoulli

Loi binomiale

Loi géométrique

Loi de Poisson

Loi hypergéométrique

5/ Loi de Poisson

Définition : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

Remarques :

- Une loi de Poisson est utilisée pour modéliser des événements rares

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

5/ Loi de Poisson

Définition : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

Remarques :

- Une loi de Poisson est utilisée pour modéliser des événements rares
- Avec cette loi, $P(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

5/ Loi de Poisson

Définition : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

Remarques :

- Une loi de Poisson est utilisée pour modéliser des événements rares
- Avec cette loi, $P(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$

$$P(\Omega) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \times e^{\lambda} = e^{-\lambda+\lambda} = e^0 = 1$$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

5/ Loi de Poisson

Définition : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

Remarques :

- Une loi de Poisson est utilisée pour modéliser des événements rares
- Avec cette loi, $P(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$

$$P(\Omega) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \times e^{\lambda} = e^{-\lambda+\lambda} = e^0 = 1$$

Propriété : Si X est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$, alors $E(X) = V(X) = \lambda$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

6/ Loi hypergéométrique

On considère un sac contenant a boules blanches et b boules noires. On a donc $N = a + b$ boules au total.

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

6/ Loi hypergéométrique

On considère un sac contenant a boules blanches et b boules noires. On a donc $N = a + b$ boules au total. On tire sans remise n boules dans ce sac.

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

6/ Loi hypergéométrique

On considère un sac contenant a boules blanches et b boules noires. On a donc $N = a + b$ boules au total. On tire sans remise n boules dans ce sac. On pose $p = \frac{a}{a+b}$ la proportion de boules blanches et on appelle X le nombre de boules blanches.

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

6/ Loi hypergéométrique

On considère un sac contenant a boules blanches et b boules noires. On a donc $N = a + b$ boules au total. On tire sans remise n boules dans ce sac. On pose $p = \frac{a}{a+b}$ la proportion de boules blanches et on appelle X le nombre de boules blanches.

X peut prendre la valeur k si :

$$\begin{cases} 0 \leqslant k \leqslant a \\ 0 \leqslant n - k \leqslant b \end{cases}$$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

6/ Loi hypergéométrique

On considère un sac contenant a boules blanches et b boules noires. On a donc $N = a + b$ boules au total. On tire sans remise n boules dans ce sac. On pose $p = \frac{a}{a+b}$ la proportion de boules blanches et on appelle X le nombre de boules blanches.

X peut prendre la valeur k si :

$$\begin{cases} 0 \leqslant k \leqslant a \\ 0 \leqslant n - k \leqslant b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant k \leqslant Np \\ n - (N - Np) \leqslant k \leqslant n \end{cases}$$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

6/ Loi hypergéométrique

On considère un sac contenant a boules blanches et b boules noires. On a donc $N = a + b$ boules au total. On tire sans remise n boules dans ce sac. On pose $p = \frac{a}{a+b}$ la proportion de boules blanches et on appelle X le nombre de boules blanches.

X peut prendre la valeur k si :

$$\begin{cases} 0 \leqslant k \leqslant a \\ 0 \leqslant n-k \leqslant b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant k \leqslant Np \\ n-(N-Np) \leqslant k \leqslant n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\max(0, n-N(1-p)) \leqslant k \leqslant \min(Np, n)$$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

6/ Loi hypergéométrique

On considère un sac contenant a boules blanches et b boules noires. On a donc $N = a + b$ boules au total. On tire sans remise n boules dans ce sac. On pose $p = \frac{a}{a+b}$ la proportion de boules blanches et on appelle X le nombre de boules blanches.

X peut prendre la valeur k si :

$$\begin{cases} 0 \leqslant k \leqslant a \\ 0 \leqslant n-k \leqslant b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant k \leqslant Np \\ n-(N-Np) \leqslant k \leqslant n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\max(0, n-N(1-p)) \leqslant k \leqslant \min(Np, n)$$

On a équiprobabilité dans un univers fini donc

$$P(X=k) =$$

Variables aléatoires discrètes

Jourd'huy

Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition

Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

6/ Loi hypergéométrique

On considère un sac contenant a boules blanches et b boules noires. On a donc $N = a + b$ boules au total. On tire sans remise n boules dans ce sac. On pose $p = \frac{a}{a+b}$ la proportion de boules blanches et on appelle X le nombre de boules blanches.

X peut prendre la valeur k si :

$$\begin{cases} 0 \leqslant k \leqslant a \\ 0 \leqslant n-k \leqslant b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant k \leqslant Np \\ n-(N-Np) \leqslant k \leqslant n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\max(0, n-N(1-p)) \leqslant k \leqslant \min(Np, n)$$

On a équiprobabilité dans un univers fini donc

$$P(X=k) = \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

loi hypergéométrique

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Définition : Soient n et N deux entiers naturels non nuls tels que $n \leqslant N$ et $p \in [0;1]$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p notée $\mathcal{H}(N,n,p)$, si $X(\Omega) = [\![\max(0, n - N(1-p)); \min(Np, n)]\!]$

loi hypergéométrique

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Définition : Soient n et N deux entiers naturels non nuls tels que $n \leqslant N$ et $p \in [0;1]$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p notée $\mathcal{H}(N,n,p)$, si $X(\Omega) = [\![\max(0, n - N(1-p)); \min(Np, n)]\!]$ et $\forall k \in [\![\max(0, n - N(1-p)); \min(Np, n)]\!]$,

$$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

loi hypergéométrique

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Définition : Soient n et N deux entiers naturels non nuls tels que $n \leqslant N$ et $p \in [0;1]$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p notée $\mathcal{H}(N,n,p)$, si $X(\Omega) = [\![\max(0, n - N(1-p)); \min(Np, n)]\!]$ et $\forall k \in [\![\max(0, n - N(1-p)); \min(Np, n)]\!]$,

$$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Remarque : La différence entre une loi binomiale et une loi hypergéométrique est l'indépendance, ou pas, des expériences de Bernoulli que l'on répète ;

loi hypergéométrique

Variables aléatoires discrètes
Jourd'huy
Généralités sur les variables aléatoires
Définition
Espérance
Variance
Fonction de répartition
Lois usuelles
Loi uniforme
Loi de Bernoulli
Loi binomiale
Loi géométrique
Loi de Poisson
Loi hypergéométrique

Définition : Soient n et N deux entiers naturels non nuls tels que $n \leqslant N$ et $p \in [0;1]$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p notée $\mathcal{H}(N,n,p)$, si $X(\Omega) = [\![\max(0, n - N(1-p)); \min(Np, n)]\!]$ et $\forall k \in [\![\max(0, n - N(1-p)); \min(Np, n)]\!]$,

$$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Remarque : La différence entre une loi binomiale et une loi hypergéométrique est l'indépendance, ou pas, des expériences de Bernoulli que l'on répète ;

Propriété : Si X suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$ alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$