INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES ROUEN NORMANDIE

# *Devoir Surveillé de Mécanique des fluides*

***EC P8-2***
J. Yon
17/6/22
durée : 1h30

**Les calculatrices sont autorisées. Aucun document n'est autorisé.**

/25 pts + 3 points bonus

**Merci d'éteindre et de ranger les téléphones portables.**

Soit un écoulement d'eau, plan, de profondeur *e* unité dont le champ de vitesse est décrit en coordonnées cartésiennes (vecteur $\vec{y}$ ascendant) par :

$$\vec{U} = \frac{1}{t_0}\left| \begin{array}{c} y\sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) \\ -\frac{y^2\pi}{2L}\cos\left(\frac{x\pi}{L}\right) \\ 0 \end{array} \right.$$

Avec $t_0 = 1\ s$, $e = 1\ m$ et $L$ une longueur caractéristique (en $m$).

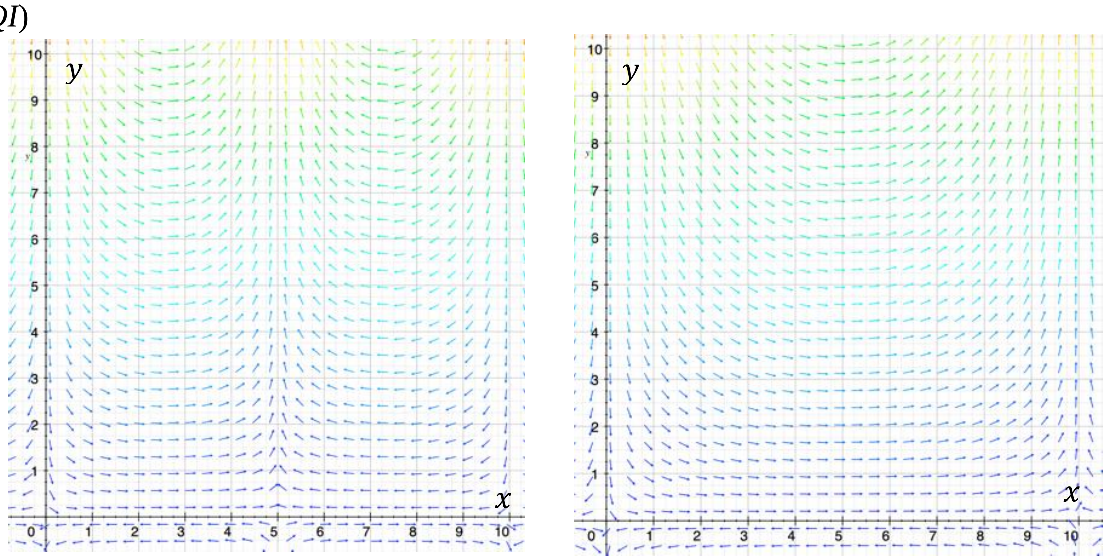
Dans la suite, les questions indépendantes sont repérées par (*QI*). Il y a deux questions bonus, nous vous conseillons de les traiter à la fin, s'il vous reste du temps.

1 pt
1. Ce champ vectoriel est-il Eulérien ou Lagrangien, justifier ? (*QI*)
   Le champ est décrit en tout x, y, z, t. Il est donc Eulérien.

1 pt
2. Est-il stationnaire ? (*QI*)
   Il n'y a pas de dépendance explicite au temps. Il est donc stationnaire.

2 pts
3. Est-il incompressible ? (*QI*)
   Sa divergence est nulle, l'écoulement est donc incompressible.

2 pts
4. Donner, en vous justifiant, pour les deux champs représentés ci-dessous les valeurs de *L*. (*QI*)




*a*

$$\vec{U} = \left| \begin{array}{c} y\sin(\frac{x}{5}\pi) \\ -\frac{y^2\pi}{20}\cos(\frac{x}{5}\pi) \\ 0 \end{array} \right., \text{ L=5 m}$$

*b*

$$\vec{U} = \left| \begin{array}{c} y\sin(\frac{x}{10}\pi) \\ -\frac{y^2\pi}{20}\cos(\frac{x}{10}\pi) \\ 0 \end{array} \right., \text{ L=10 m}$$

*Figure 1 : Propositions de champs de vitesses.*

Pour la suite, pour les applications numériques, nous considérerons que $L = 10\ m$

1 pt

5. Rappeler l'expression générale du débit volumique. (*QI*)

$$q_v = \iint \vec{U} \cdot \vec{n}\, ds$$

2 pts

6. Donner l'expression analytique ainsi que la valeur numérique du débit volumique traversant la section positionnée en $y = L$ et dont les côtés sont définis par $z \in [0; e]$ et x$\in [0; L/2]$.
Le fluide traverse cette surface horizontale du haut vers le bas, prenons donc $\vec{n} = -\vec{y}$ de façon à déterminer un débit positif :

$$q_v = \iint \vec{U} \cdot \vec{n}\, ds = \iint \frac{1}{t_0} \frac{y^2 \pi}{2L} cos\left(\frac{x\pi}{L}\right)\, dx\, dz \cdot 1 = \frac{y^2\pi}{2Lt_0} \int_{z_{min}}^{z_{max}} dz \int_{x_{min}}^{x_{max}} cos\left(\frac{x\pi}{L}\right) dx$$

$$= \frac{y^2\pi}{2t_0 L} \frac{L}{\pi} [z]_{z_{min}}^{z_{max}} \left[sin\left(\frac{x\pi}{L}\right)\right]_{x_{min}}^{x_{max}}$$

$$= \frac{y^2}{2t_0} [z_{max} - z_{min}] \left[sin\left(\frac{x_{max}\pi}{L}\right) - sin\left(\frac{x_{min}\pi}{L}\right)\right]$$

$$q_v = \frac{L^2 e}{2t_0}\left[sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - sin(0)\right] = 50\ m^3/s$$

2 pts

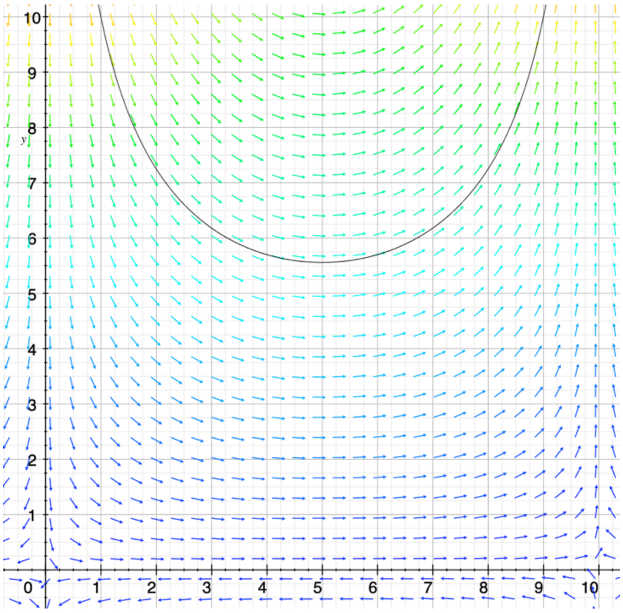
7. On rappelle qu'une fonction de courant $\psi$ doit vérifier $\vec{U} \cdot \overrightarrow{grad}(\psi) = \vec{0}$. Pour un écoulement plan, la fonction de courant doit donc vérifier $u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$. En déduire l'expression générique des fonctions de courant de cet écoulement. (*QI*)
Pour un écoulement plan en description cartésienne, on vérifie $u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$. On vérifie que la fonction $\psi = \frac{y^2}{2t_0} sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) + C$ convient.

2 pts

8. Un plongeur positionné en *A(1 ;L)* à *t=0* se laisse porter par le courant. Déduire de la réponse à la question 7 la trajectoire du plongeur. Vous montrerez qu'elle est de la forme $y = \pm L\sqrt{\frac{D}{sin\left(\frac{x\pi}{L}\right)}}$ avec *D* une constante à expliciter.
Évaluons tout d'abord la valeur de sa fonction de courant à t=0 : $\psi = \frac{L^2}{2t_0} sin\left(\frac{\pi}{L}\right) + C$. Comme le plongeur suit une ligne de courant, $\psi$ reste constant et donc $\frac{L^2}{2t_0} \times sin\left(\frac{\pi}{L}\right) + C = \frac{y^2}{2t_0} sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) + C$ et donc $y = \pm L\sqrt{\frac{sin\left(\frac{\pi}{L}\right)}{sin\left(\frac{x\pi}{L}\right)}}$. Ainsi, dans le cadrant supérieur droit, $D = sin\left(\frac{\pi}{L}\right)$. Comme l'écoulement est stationnaire, sa trajectoire coïncide avec sa ligne de courant.

1 pt

9. Tracer cette trajectoire sur le champ de vitesse précédemment sélectionné en figure 1. (*QI*)




+1 pts

10. *Question Bonus* : Évaluer par le calcul la position du point $B$ correspondant au point le plus bas de la trajectoire. Vous devez trouver $x_B = L/2$ et $y_B = L\sqrt{sin\left(\frac{\pi}{L}\right)}$.

Il atteint son point le plus bas lorsque $sin\left(\frac{x\pi}{L}\right)$ et maximal, c'est-à-dire pour $x_B = L/2$ et donc en $y_B = L\sqrt{\frac{sin\left(\frac{\pi}{L}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}} = L\sqrt{sin\left(\frac{\pi}{L}\right)} = 5{,}60.$

2 pts

11. Déterminer les normes de la vitesse du plongeur en $A$ et en $B$.

Initialement, le plongeur est en $(1; L)$ sa vitesse est alors $\vec{U}(A) = \frac{1}{t_0}\left|\begin{array}{l} Lsin\left(\frac{\pi}{L}\right) \\ -\frac{L^2\pi}{2L}cos\left(\frac{\pi}{L}\right) \\ 0 \end{array}\right.$ et donc

$V(A) = \frac{L}{t_0}\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{L}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{L}\right)} = 15{,}25\ m/s$

Au plus bas ; sa vitesse est :

$$\vec{U}(B) = \frac{1}{t_0}\left|\begin{array}{l} L\sqrt{sin\left(\frac{\pi}{L}\right)}\,sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ -\frac{Lsin\left(\frac{\pi}{L}\right)\pi}{2}cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 \end{array}\right. = \frac{L}{t_0}\sqrt{sin\left(\frac{\pi}{L}\right)}\,\vec{x}$$

Et donc $V(B) = \frac{L}{t_0}\sqrt{sin\left(\frac{\pi}{L}\right)} = 5{,}6\ m/s$

2,5 pts

12. Rappeler les hypothèses de validité du théorème de Bernoulli et dire s'il est applicable le long de la trajectoire du plongeur. (*QI*)

Les hypothèses de validité sont :

- Fluide parfait (acceptable)
- Stationnaire (vérifié)
- Incompressible (vérifié)
- Uniquement soumis aux forces de volume de pesanteur (Ok)
- Valable le long d'une ligne de courant (C'est ce que l'on va considérer)

Le théorème est donc applicable.

13. Évaluer analytiquement (*QI*) puis numériquement la surpression ressentie par le plongeur arrivé en *B* par rapport à celle ressentie en *A*.

2,5 pts

Appliquons Bernoulli entre A et B : $P_A + \frac{\rho V_A^2}{2} + \rho g y_A = P_B + \frac{\rho V_B^2}{2} + \rho g y_B$. On en déduit que $\Delta P = P_B - P_A = \frac{\rho}{2}(V_A^2 - V_B^2) + \rho g(y_A - y_B)$

$$\Delta P = \frac{\rho}{2}\left(\frac{L^2}{t_0^2}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{L}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{L}\right)\right) - \frac{L^2}{t_0^2} sin\left(\frac{\pi}{L}\right)\right) + \rho g\left(L - L\sqrt{sin\left(\frac{\pi}{L}\right)}\right)$$

$$\Delta P = \frac{\rho}{2}\frac{L^2}{t_0^2}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{L}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{L}\right) - sin\left(\frac{\pi}{L}\right)\right) + \rho g L\left(1 - \sqrt{sin\left(\frac{\pi}{L}\right)}\right)$$

$$\Delta P = 1{,}44\ bar$$

14. Quelle serait cette surpression si le plongeur parcourait la même trajectoire dans de l'eau au repos (Analytiquement (*QI*) et numériquement) ?

2 pts

Pour de l'eau statique uniquement soumis à la pesanteur on a :

$$P_A + \rho g y_A = P_B + \rho g y_B$$

Ainsi

$$\Delta P = \rho g(y_A - y_B) = \rho g L\left(1 - \sqrt{sin\left(\frac{\pi}{L}\right)}\right) = 0{,}44\ bar$$

15. Calculer le champ Eulérien des accélérations particulaires. On rappelle ci-dessous sa formulation en coordonnées cartésiennes.

2 pts

$$\vec{a} = \left|\begin{array}{l} \frac{\partial U_x}{\partial t} + \frac{\partial U_x}{\partial x}U_x + \frac{\partial U_x}{\partial y}U_y + \frac{\partial U_x}{\partial z}U_z \\ \frac{\partial U_y}{\partial t} + \frac{\partial U_y}{\partial x}U_x + \frac{\partial U_y}{\partial y}U_y + \frac{\partial U_y}{\partial z}U_z \\ \frac{\partial U_z}{\partial t} + \frac{\partial U_z}{\partial x}U_x + \frac{\partial U_z}{\partial y}U_y + \frac{\partial U_z}{\partial z}U_z \end{array}\right.$$

$$\vec{a} = \frac{1}{t_0^2}\left|\begin{array}{c} \frac{\pi}{4L}y^2 sin\left(\frac{2x\pi}{L}\right) \\ \frac{y^3\pi^2}{2L^2} \\ 0 \end{array}\right.$$

16. *Question Bonus* : En déduire l'expression analytique puis numérique de l'accélération du plongeur au point B.

+2 pts

$$\overrightarrow{a_B} = \frac{L\pi^2}{2t_0^2}\left(sin\left(\frac{\pi}{L}\right)\right)^{3/2} \vec{y} = 8{,}48\,\vec{y}\ m/s^2$$