

Exercice 1**Chose promise chose due****4 points**

1. Qu'est-ce qu'un OPM?
2. Donnez un exemple de phénomène pouvant être modélisé par une loi exponentielle?
3. Quel modèle statistique proposeriez vous pour représenter le nombre de personne entrant dans un bureau de poste dans un intervalle de 15 minutes?
4. Qu'est-ce qu'une statistique?
5. Qu'est-ce qu'un échantillon?
6. En quoi est-ce intéressant qu'il soit i.i.d.?
7. Comment comparer deux estimateurs?
8. A quoi sert la borne de Cramer Rao?

Exercice 2**Les cars types****11 points**

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi normale centrée de variance σ^2 inconnue, et donc de densité :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Nous allons dans cet exercice étudier une classe d'estimateurs de l'écart type et donc du paramètre σ (et non de la variance σ^2).

1. Montrez que
 - a) éventuellement en intégrant par parties

$$\mathbb{E}(|X|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma,$$

- b) et que, éventuellement en se souvenant que $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

$$\text{Var}(|X|) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\sigma^2.$$

2. Quelle est la borne de Cramer Rao de la variance des estimateurs sans biais de σ ?

On pose

$$\hat{\sigma}_a = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|,$$

où a est un coefficient positif.

3. L'estimateur sans biais
 - a) Exprimer le biais de cet estimateur $\hat{\sigma}_a$ comme une fonction du coefficient a .
 - b) Comment choisir a pour que soit sans biais?
 - c) Quel est le risque de cet estimateur sans biais de a ?
 - d) Est-il efficace?
4. Le choix de a
 - a) Exprimer la variance de $\hat{\sigma}_a$ comme une fonction du coefficient a .
 - b) En déduire le risque de cet estimateur $\hat{\sigma}_a$ comme une fonction du coefficient a .
 - c) Montrez que, pour $n = 1$, a_{opt} la valeur de a qui minimise ce risque est

$$a_{opt} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

5. Conclusion
 - a) A la vue de ces résultats, quel est à votre sens le meilleur estimateur du paramètre σ et pourquoi?
 - b) Quel est ici l'intérêt de la borne de Cramer Rao?

Exercice 3**Un genre de trinomiale****5 points**

Soit X une variable aléatoire ne pouvant prendre que les trois valeurs 0, 1 ou 2 associée, pour un paramètre $\theta \in [0, 1]$ inconnu, à la loi P_θ suivante :

$$P_\theta(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad P_\theta(X = 1) = \frac{3\theta}{4}, \quad P_\theta(X = 2) = \frac{3(1-\theta)}{4}$$

1. Vérifier que, quel que soit $\theta \in [0, 1]$, P_θ définit bien une distribution de probabilité.
2. Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon i.i.d. de n observations de loi parente P_θ avec N_0 , N_1 et N_2 les variables aléatoires comptant respectivement le nombre d'observations égales à 0, 1 et 2 dans l'échantillon, telles que $N_0 + N_1 + N_2 = n$ et $N_k = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i=k\}}$ pour $k = 0, 1$ et 2, où $\mathbb{1}_A$ est la fonction indicatrice de l'ensemble A , c'est-à-dire telle que $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon.
 - a) Montrez que $\mathbb{E}(N_0) = \frac{n}{4}$.
 - b) Quelles est la valeur de $\mathbb{E}(N_1)$?
 - c) Montrez que la vraisemblance de l'échantillon s'écrit :

$$L(\theta, X_1, \dots, X_n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{N_0} \left(\frac{3\theta}{4}\right)^{N_1} \left(\frac{3(1-\theta)}{4}\right)^{N_2}$$

- d) Quel est l'estimateur maximum de vraisemblance de θ ?
 - e) Montrez que, pour ce modèle, l'information de Fisher de θ est

$$\frac{3n}{4\theta(1-\theta)}.$$

Formulaire

- fréquences $\hat{f}_i = \frac{n_i}{n}$ où n est le nombre total d'observations et n_i le nombre d'observant de la modalité i
- moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \hat{f}_i x_i$
- variance empirique : $\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
- espérance d'une variable aléatoire discrète : $\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \mathbb{P}(x_i)$.
- espérance d'une variable aléatoire continue de densité $f(x)$: $\mathbb{E}(X) = \int x f(x) dx$.
- variance d'une variable aléatoire X : $Var(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$.
- médiane : $\mathbb{P}(X < M) = 0,5$
- mode : $Argmax_{x \in \Omega} \{\mathbb{P}(x)\}$
- fractiles à l'ordre p , $\forall p \in [0, 1]$, $\hat{\Phi}_p$ telle que $\hat{\mathbb{P}}(X \leq \hat{\Phi}_p) = p$
- les quartiles :
 - $\hat{\Phi}_{\frac{1}{4}} = \hat{Q}_1$, telle que $\hat{F}(\hat{Q}_1) = \frac{1}{4}$,
 - $\hat{\Phi}_{\frac{1}{2}} = \hat{Q}_2 = \hat{M}$, telle que $\hat{F}(\hat{M}) = \frac{1}{2}$,
 - $\hat{\Phi}_{\frac{3}{4}} = \hat{Q}_3$, telle que $\hat{F}(\hat{Q}_2) = \frac{3}{4}$.
- covariance : $c_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
- corrélation : $cor(x, y) = \frac{c_{xy}}{\sqrt{\hat{\sigma}_x^2 \hat{\sigma}_y^2}}$
- probabilité conditionnelle : $\mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}$
- espérance conditionnelle : $\mathbb{E}[Y | X = a] = \sum_{i=1}^n y_i \mathbb{P}(Y = y_i | X = a)$
- La loi des grands nombres $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}(X)$

Estimateurs :

- Le risque : $R_{\hat{\theta}}(\theta) = \mathbb{E}((\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \theta)^2)$
 - Le biais d'un estimateur : $\mathbb{E}(\hat{\theta}) - \theta$
 - La variance d'un estimateur : $\mathbb{E}((\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta}))^2)$
- Soit X une variable aléatoire de distribution $f_{\theta}(x)$ et (X_1, \dots, X_n) une famille de n variables aléatoires i.i.d. ayant pour loi parente la loi de X .
- Vraisemblance :

$$L(\theta, X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(X_i)$$

Log vraisemblance :

$$\ell(\theta, X_1, \dots, X_n) = \log L(\theta, X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \log f_{\theta}(X_i)$$

- L'information de Fisher : $I_n(\theta) = Var\left(\frac{\partial \ell(\theta, X_1, \dots, X_n)}{\partial \theta}\right) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 \ell(\theta, X_1, \dots, X_n)}{\partial \theta^2}\right)$
- Pour $\theta \in \mathbb{R}^p$, L'information de Fisher est la matrice $p \times p$

$$I_n(\theta) = \mathbb{E}(\nabla \ell(\theta, X_1, \dots, X_n) \nabla \ell(\theta, X_1, \dots, X_n)^{\top})$$

- Borne de Cramer Rao
- pour un estimateur sans biais de θ

$$BCR(\theta) = \frac{1}{I_n(\theta)} \leq \text{Var}(\widehat{\theta}(X_1, \dots, X_n))$$

- Pour un estimateur sans biais d'une fonction de θ : $\mathbb{E}(\widehat{u}(\theta)) = u(\theta)$

$$BCR(\theta) = \frac{u'(\theta)}{I_n(\theta)} \leq \text{Var}(\widehat{u}(\theta)(X_1, \dots, X_n))$$

- pour un estimateur biaisé de biais B

$$BCR(\theta) = \frac{1 + B'(\theta)}{I_n(\theta)} \leq \text{Var}(\widehat{\theta}(X_1, \dots, X_n))$$