INSA - ITI **Année 2021-2022**

ITI 3 - Remise à niveau : Probas.

1 Rappels de cours

1.1 VA discrètes, loi marginale, loi conjointe

L'application $\mathbb{P} : X(\Omega) \to \mathbb{R}$, qui à x associe $p_x = \mathbb{P}(X = x)$, est appelée **loi de probabilité** de X.

Un **couple de VA** réelles est une application de Ω dans $\mathbb{R}^2$ tel que chaque composante soit une VA réelle.

La **loi conjointe** de X et de Y est dite la loi de (X, Y).

Si on connaît la loi du couple (X, Y), on peut retrouver la loi de X et celle de Y, appelées **lois marginales** :

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

Attention : Si on connaît les deux lois marginales, on ne peut pas en général reconstituer la loi du couple, sauf si X et Y sont indépendantes. Dans ce cas $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$.

1.2 Espérance, Variance, Ecart-type, Covariance

L'espérance d'une variable aléatoire X qui ne prend qu'un nombre fini de valeur est :

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Si X prend un nombre infini dénombrable de valeur, X n'a une espérance que si la série

$$\sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

est convergente. L'espérance de X est alors la somme de la série.

Propriétés de l'espérance : Si X et Y sont deux VA définies sur un même univers Ω, admettant une espérance, alors :

1. $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
2. $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X), \quad \forall a \in \mathbb{R}$.
3. Si $X \geq 0$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
4. Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Formule de transfert : Soient X une VA discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; alors $f(X)$ est d'espérance finie ssi la famille $f(x)\mathbb{P}(X = x)$ est sommable. Dans ce cas :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$$

Soit X une VA. **La variance** de X est $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$.
Son écart-type est la racine carrée de sa variance.

Propriétés de la variance :

1. $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.
2. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des VA indépendantes alors $\mathbb{V}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i)$.

La covariance de deux VA X et Y de variances respectives finies est défini par

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))].$$

Propriétés de la covariance :

1. $cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
2. $cov(X, X) = \mathbb{V}(X)$.
3. Si X et Y sont indépendantes alors $cov(X, Y) = 0$. La réciproque est fausse.

1.3 Loi usuelles discrètes

Loi uniforme : Loi d'une VA X prenant ses valeurs de $\{1, \ldots, n\}$ avec la même probabilité $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n}, \forall x \in \{1, \ldots, n\}$. $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$; $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$.
Exemples : Lancer d'un dé régulier, d'une pièce, naissance, etc.

Loi binomiale : Loi d'une VA X prenant ses valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$, de paramètres (n, p) telle que $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - P)^{n-k}, \forall k \in \{0, \ldots, n\}$. $\mathbb{E}(X) = np$; $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$.
Exemples : n tirages avec remise (Bernouilli) dans une urne ayant une proportion p de boules rouges, X désigne le nombre de boules rouges piochées.

Loi de Poisson : Loi d'une VA X prenant ses valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$, de paramètre $\lambda > 0$ telle que $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \forall k \in \{0, \ldots, n\}$. $\mathbb{E}(X) = \lambda$; $\mathbb{V}(X) = \lambda$.
Exemples : Nombre de personnes de présentant à un arrêt de bus après une durée λ. Nombre d'événements survenus sur une période donnée.
Propriété : Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson. Si pour tout n, X_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p_n) et si np_n converge vers λ alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_n = k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Loi géométrique : Loi d'une VA X prenant ses valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$, de paramètre p telle que $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, \forall k \in \{0, \ldots, n\}$. $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$; $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
Exemples : Rang de la 1ère boule rouge tirée dans l'urne de Bernouilli ayant une proportion p de boules rouges.

2 Exercices

2.1 Lois usuelles

Exercice 1 :

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements :

   A : "Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent".

   B : "Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent".
2. Soit X la variable aléatoire : "nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres" : Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

Exercice 2 :

Un avion peut accueillir 20 personnes ; des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : "nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20". Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale) Quelle est son espérance, son écart-type ? Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

Exercice 3 :

Dans une poste d'un petit village, on remarque qu'entre 10 heures et 11 heures, la probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute est considérée comme nulle et que l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée. On a observé que la probabilité pour qu'une personne se présente entre la minute n et la minute $n+1$ est : $p = 0.1$. On veut calculer la probabilité pour que : 3,4,5,6,7,8... personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h.

1. Définir une variable aléatoire adaptée, puis répondre au problème considéré.
2. Quelle est la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h ?

Exercice 4 :

Si dans une population une personne sur cent est un centenaire, quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi 100 personnes choisies au hasard ? Et parmi 200 personnes ?

Exercice 5 :

Soit X une VA qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Donner une CNS pour que la suite $\mathbb{P}(X = k)$ soit décroissante.

Exercice 6 :

Soit X une VA suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer l'espérance de $\frac{1}{1+X}$.

Exercice 7 : On possède une pièce de monnaie non truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit égale à 0.3.

1. On lance 10 fois la pièce, quelle est la probabilité d'obtenir 3 fois pile ?
2. On lance la pièce jusqu'à obtenir pile pour la 1ère fois. Combien de lancers aura-t-on besoin en moyenne ?

Exercice 8 : Soit Y une VA discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que Y est sans mémoire si, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y > n) > 0; \quad \mathbb{P}(Y > n + m | Y > n) = \mathbb{P}(Y > m).$$

On suppose que Y suit une loi géométrique. Démontrer que Y est une loi sans mémoire et interpréter ce résultat en considérant une suite d'épreuves répétées.

2.2 Couple de VA

Exercice 9 :

On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard de façon équiprobable une boite, puis une boule dans cette boite. On note X le numéro de la boite et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. En déduire la loi de Y.
3. Calculer l'espérance de Y.

Exercice 10 :

Soient X et Y deux VA à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telles que :

$$\mathbb{P}(X = i; Y = j) = \frac{a}{2^{i+j}}$$

1. Calculer a.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 11 :

On suppose que le nombre N d'enfants dans une famille suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose qu'à chaque naissance, la probabilité que l'enfant soit une fille est $p \in]0, 1[$ et celle que ce soit un garçon est $q \in]0, 1[$. On suppose aussi que les sexes des naissances successives sont indépendants. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de filles par familles, et Y celle du nombre de garçons.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (N, X).
2. Déterminer les lois marginales de X et Y.